

*Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza*

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:

Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



Instabilità Strutturale: instabilità elastica (testo cap. 23)

- **Descrizione del fenomeno**
- **Definizioni e criterio di Eulero**
- **Ipotesi del modello**
- **Asta di Eulero (asta caricata di punta)**
- **Snellezza λ di una trave**

Descrizione del fenomeno

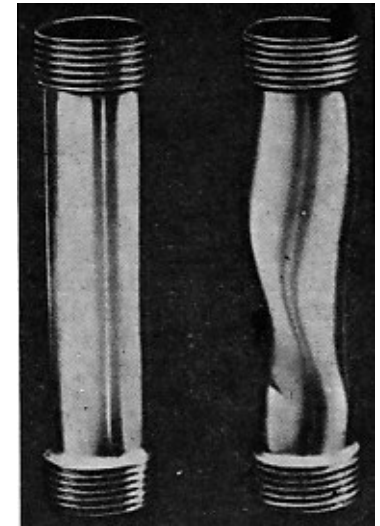
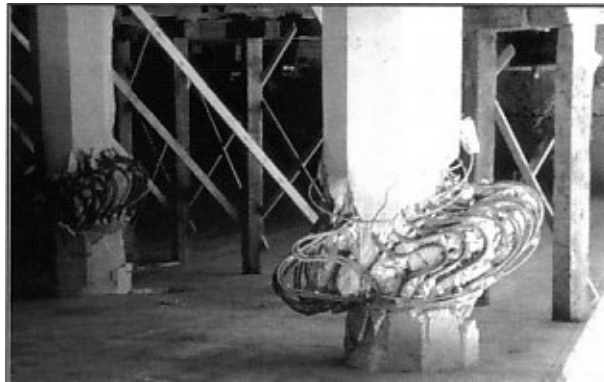
- *Carichi critici*
- *Materiale in fase elastica quando il fenomeno inizia a manifestarsi*
- *Perdita di stabilità della configurazione di equilibrio*



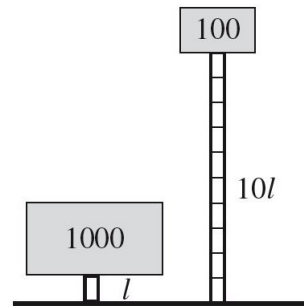
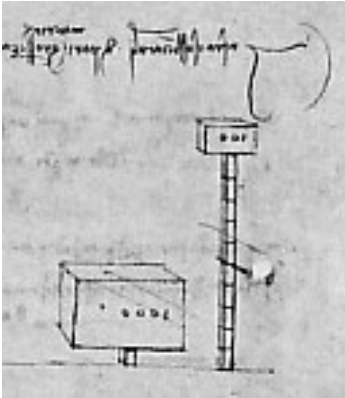
(Video)

Esempi di tipologie strutturali interessate dal fenomeno

- *Travi snelle soggette a compressione centrata o a pressoflessione*
- *Travi alte sezione sottile aperta soggette a flessione (instabilità flessio-torsionale)*
- *Lastre sottili (fenomeni locali di imbozzamento)*
- *Cilindri cavi sottili soggetti a pressione idrostatica esterna (ovalizzazione)*
- *Archi ribassati (fenomeni di snap-through)*



Studi sperimentali di Leonardo (Cod. Atl. f. 410r)



Infra i sostentacoli di pari materia e grossezza quello fia di maggiore fortezza del quale la sua lunghezza fia più breve. Se collocherai un sostentacolo di pari grossezza e materia il quale resista a 100 e che poi tu ne tolga via i nove decimi dell'altezza, tu troverai che il suo rimanente, essendo nelli estremi sostenuto, resisterà a 1000. (Cod. Atl. f. 410r)

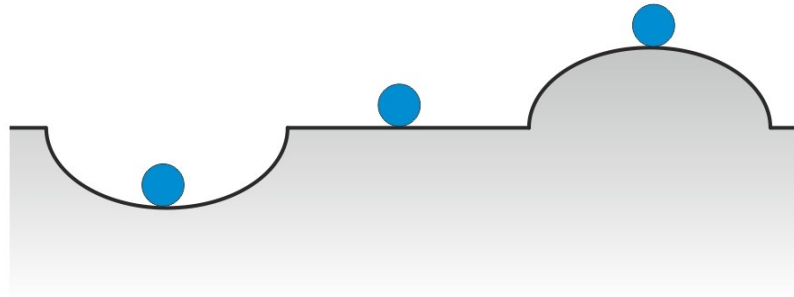
Modello di Eulero (1707-1783)



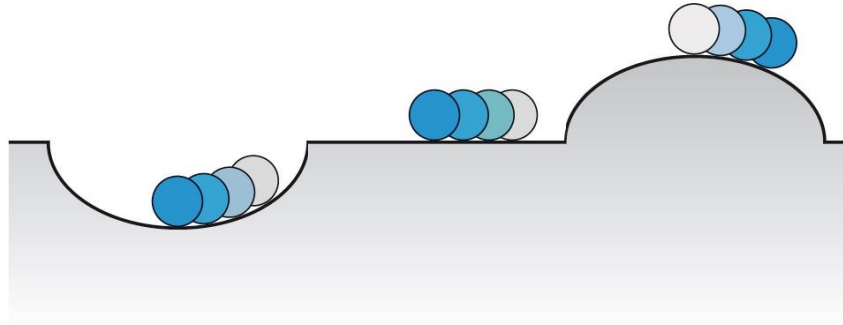
L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietati gaudentes*, 1744

L. Euler, *Sur la force des colonnes*, Hist. acad. sci, pp. 252-282, 1759.

Posizione di equilibrio e 'qualità' dell'equilibrio



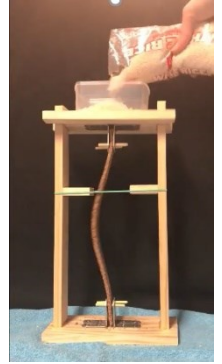
Posizione di equilibrio e 'qualità' dell'equilibrio



- *Posizione di **equilibrio stabile***
- *Posizione di **equilibrio indifferente**: sono possibili più posizioni di equilibrio distinte da quella iniziale*
- *Posizione di **equilibrio instabile***

Carico critico

- *Valore della forza esterna in corrispondenza dei quali la configurazione di equilibrio cessa di essere stabile*



Sistema meccanico euleriano

- *Sistema meccanico soggetto a forze conservative e caratterizzato da un materiale che manifesta comportamento elastico lineare prima che sia raggiunto il carico critico (fase pre-critica)*

Criterio di Eulero (criterio statico)

- *I carichi critici esprimono i valori delle forze esterne in corrispondenza dei quali la configurazione di equilibrio cessa di essere unica e diventano possibili (infinite) posizioni di equilibrio distinte da quella iniziale*

Ipotesi alla base del modello lineare di Trave Elastica 1D

Ipotesi 1 (cinematica): ‘piccoli spostamenti’, il modulo dello spostamento di ogni punto si mantiene sempre molto più piccolo delle dimensioni caratteristiche del sistema

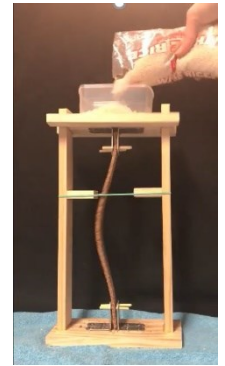
Ipotesi 2 (statica): le equazioni cardinali della statica, sia a livello globale che locale, si possono scrivere con riferimento alla configurazione iniziale (*indeformata*) del sistema.

Ipotesi 3 (materiale): si suppone che il materiale costitutivo abbia comportamento ideale *elastico lineare*.

Esistenza e Unicità della soluzione

Modello lineare (→ soluzione unica) non compatibile con il criterio di Eulero (→ infinite soluzioni in corrispondenza dei carichi critici): **modificare alcune delle ipotesi precedenti**

Instabilità elastica: ipotesi



- **Oggetto di studio:** *instabilità in un sistema Euleriano: cioè soggetto a forze conservative e caratterizzato da un materiale a comportamento elastico lineare prima che sia raggiunto il carico critico (fase pre-critica)*

Nuove ipotesi (modello nonlineare)

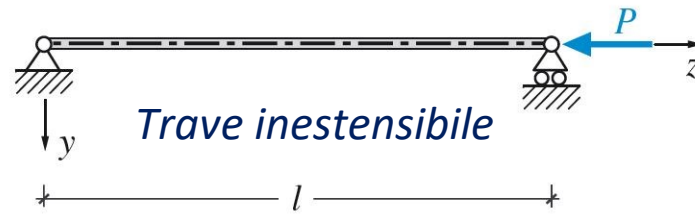
Ipotesi 1 (cinematica): ‘spostamenti finiti’, il campo di spostamento in uno o più punti può presentare modulo paragonabile alle dimensioni caratteristiche del sistema

Ipotesi 2 (statica): le equazioni cardinali della statica, sia a livello globale che locale, si devono scrivere con riferimento alla configurazione finale (*deformata*) del sistema.

Ipotesi 3 (materiale): si suppone che il materiale costitutivo abbia comportamento ideale *elastico lineare*.

Posizione del problema

- *Determinare il valore (i valori) della forza assiale P in corrispondenza del quale la configurazione di equilibrio diventa instabile. Si consideri per iniziare lo schema di **trave appoggiata** e la **sezione circolare** di raggio R ($I = I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi R^4$)*



Ipotesi

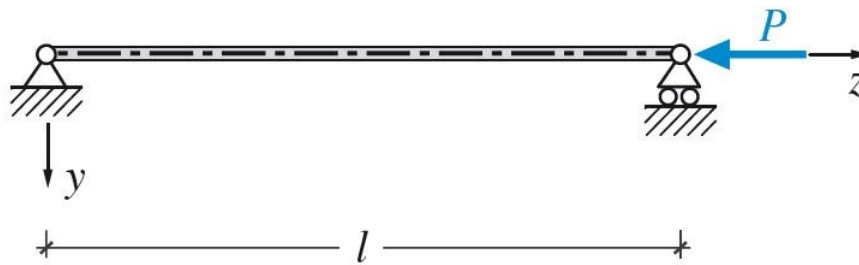
Ipotesi 1 (cinematica): ‘piccoli spostamenti’, il modulo dello spostamento di ogni punto si mantiene sempre molto più piccolo delle dimensioni caratteristiche del sistema

Ipotesi 2 (statica): le equazioni cardinali della statica, sia a livello globale che locale, si devono scrivere con riferimento alla configurazione finale (*deformata*) del sistema.

Ipotesi 3 (materiale): si suppone che il materiale costitutivo abbia comportamento ideale *elastico lineare*.

Soluzione banale

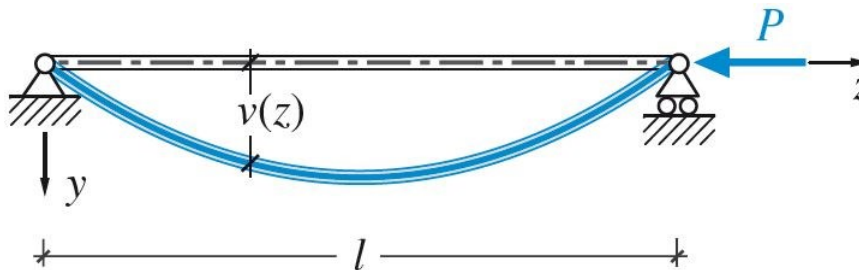
$$v(z) = 0, z \in [0, l]$$



$v(z)$: spostamento trasversale [L] positivo se concorde all'asse locale y

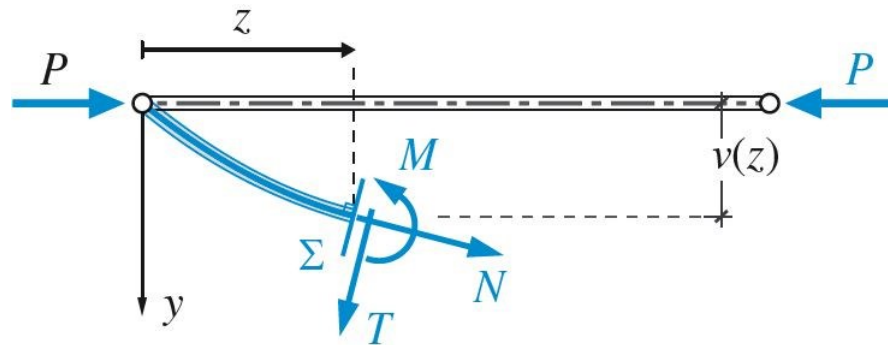
Applicazione del criterio di Eulero

Determinare, se esistono, i valori del carico assiale P in corrispondenza dei quali divengano possibili soluzioni del problema elastico diverse da quella banale (cioè soluzioni con $v(z) \neq 0$). Tali valori sono i carichi critici cercati.



Equazioni cardinali della statica per il tratto deformato $A\Sigma$

$$M_{\Sigma} = 0$$



Equazioni cardinali della statica per il tratto deformato $A\Sigma$

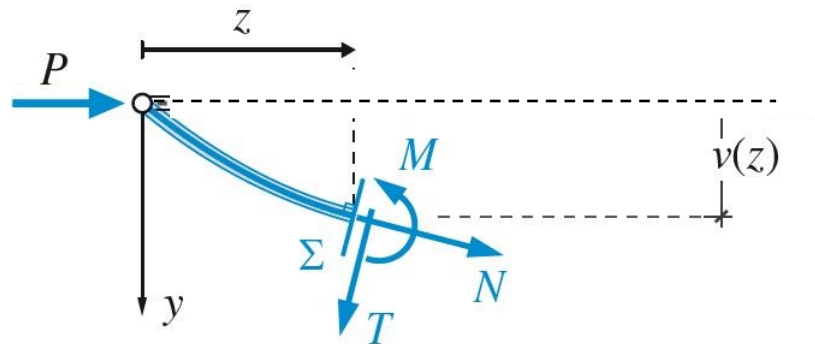
$$M_{\Sigma} = 0 \Rightarrow M(z) - Pv(z) = 0 \Rightarrow -EIv''(z) - Pv(z) = 0$$

$$v''(z) + \frac{P}{EI}v(z) = 0 \quad (I = I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi R^4)$$

Poiché $\frac{P}{EI} > 0$, posto $\frac{P}{EI} = \kappa^2$, si ha la seguente equazione della linea elastica

$$\boxed{v''(z) + \kappa^2 v(z) = 0} \quad \kappa^2 = \frac{P}{EI}$$

da integrare con le opportune condizioni al contorno



Instabilità elastica: asta di Eulero

$$v''(z) + \kappa^2 v(z) = 0 \quad \kappa^2 = \frac{P}{EI}$$

Soluzione generale

$$v(z) = C_1 \sin(\kappa z) + C_2 \cos(\kappa z) \quad \kappa = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

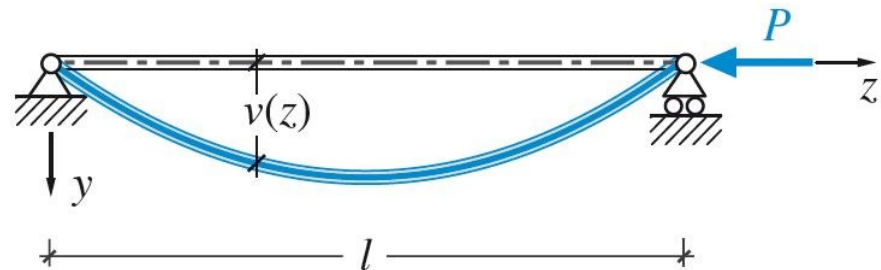
Soluzione banale: $C_1 = 0, C_2 = 0$

A norma del criterio di Eulero si devono trovare eventuali valori del carico $P = \kappa^2 EI$ in corrispondenza dei quali sono possibili **soluzioni non banali**: $C_1 \neq 0$, e/o $C_2 \neq 0$

Condizioni al contorno

$$v(0) = 0$$

$$v(l) = 0$$



Instabilità elastica: asta di Eulero

Condizioni al contorno $v(z) = C_1 \sin(\kappa z) + C_2 \cos(\kappa z)$

$$v(0) = 0$$

$$C_2 = 0$$

$$v(l) = 0$$

$$C_1 \sin(\kappa l) + C_2 \cos(\kappa l) = 0$$

Sistema di equazioni algebrico lineare omogeneo nelle incognite C_1 e C_2

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin(\kappa l) & \cos(\kappa l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per il teorema di Rouché-Capelli, ammette soluzione diversa dalla banale solo se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sin(\kappa l) & \cos(\kappa l) \end{bmatrix} = -\sin(\kappa l) = 0$$

Soluzioni non banali $v(z) \neq 0$

$$\boxed{\sin(\kappa l) = 0} \quad \& \quad \begin{array}{l} C_2 = 0 \\ C_1 \neq 0 \end{array}$$

Carichi critici (criterio di Eulero)

$$\boxed{\sin(\kappa l) = 0} \Rightarrow \kappa = n \frac{\pi}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \kappa^2 = n^2 \frac{\pi^2}{l^2} = \frac{P}{EI} \Rightarrow$$

Carichi critici:
$$\boxed{P_{cr,n} = n^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots}$$

Carico critico euleriano ($n = 1$):

$$\boxed{P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}}$$

Soluzioni non banali $v(z) \neq 0$

$$\sin(\kappa l) = 0$$

$$\& \quad \begin{aligned} C_2 &= 0 \\ C_1 &\neq 0 \end{aligned}$$

Deformate critiche

$$\sin(\kappa l) = 0 \Rightarrow \kappa = n \frac{\pi}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow$$

$$C_1 \neq 0, C_2 = 0 \Rightarrow v(z) = C_1 \sin(\kappa z)$$

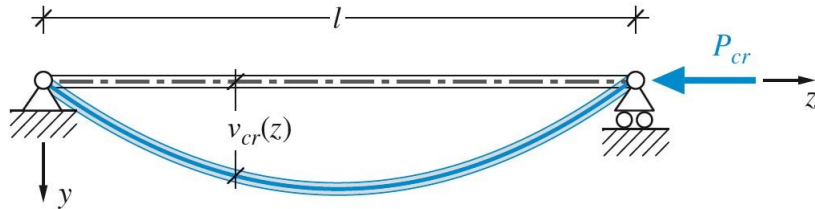
Deformate critiche:
$$v_{cr,n}(z) = C_1 \sin\left(n \frac{\pi}{l} z\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Deformata critica euleriana ($n = 1$):

$$v_{cr}(z) = C_1 \sin\left(\frac{\pi}{l} z\right), \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

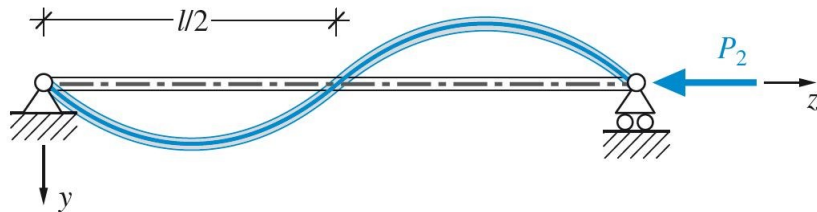
Instabilità elastica: asta di Eulero

Deformate critiche $v_{cr,n}(z) = C_1 \sin\left(n\frac{\pi}{l}z\right)$ $C_1 \neq 0$ (∞^1 soluzioni)



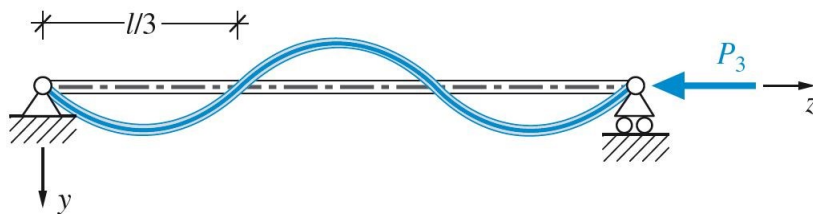
Carico critico euleriano $n = 1$:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$



Carico critico $n = 2$:

$$P_2 = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2} > P_{cr}$$



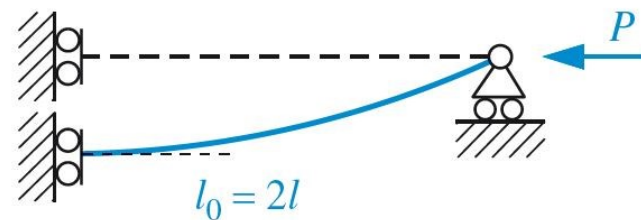
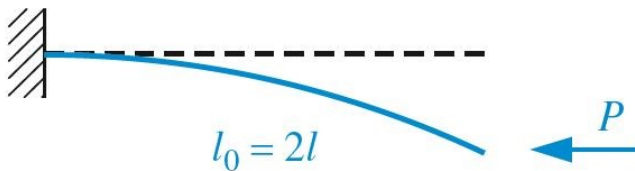
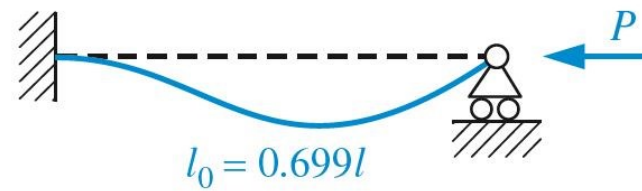
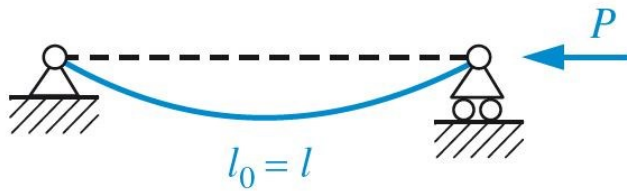
Carico critico $n = 3$:

$$P_3 = 9\pi^2 \frac{EI}{l^2} > P_2 > P_{cr}$$

Condizioni di vincolo diverse

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2}$$

l_0 : lunghezza libera di inflessione
(dipende dalla lunghezza l e dalle condizioni di vincolo)



Sezioni diverse dalla sezione circolare

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2}$$

l_0 : lunghezza libera di inflessione

Se la sezione non è circolare e risulta $I_x \neq I_y$, il carico critico più pericoloso è quello più piccolo: si continua quindi a utilizzare la formula precedente ponendo:

$$I = \min(I_x, I_y)$$

Esempio: asta a sezione rettangolare sottile



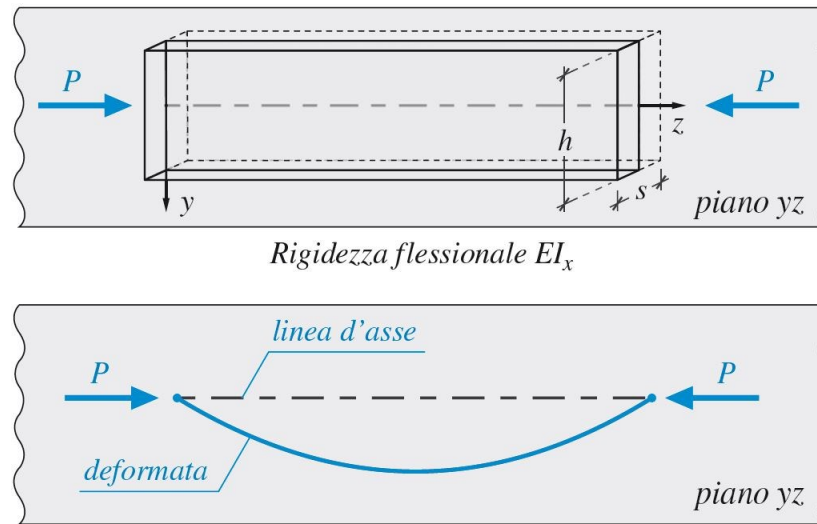
$$I_x = \frac{1}{12} sh^3$$

$$I_y = \frac{1}{12} hs^3$$

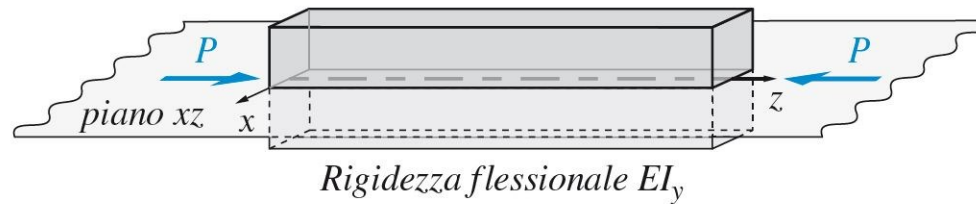
$$I = \min(I_x, I_y) = I_y = \frac{1}{12} hs^3$$

Piano 'forte' di inflessione

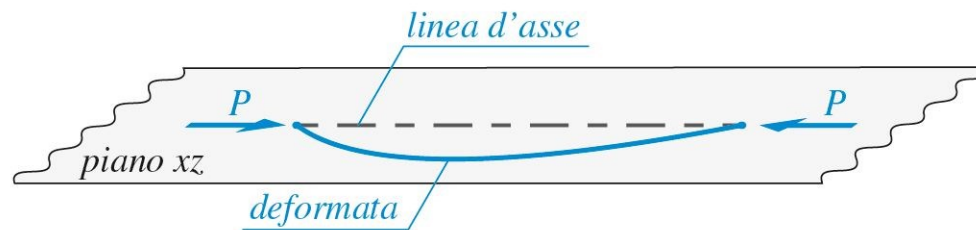
$$I_x = \frac{1}{12} sh^3$$



Piano 'debole' di inflessione



$$I_y = \frac{1}{12} h s^3$$



Instabilità elastica: asta di Eulero

Snellezza di una trave

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2 A} = \pi^2 \frac{E}{l_0^2} \rho^2 = \pi^2 \frac{E}{\left(\frac{l_0^2}{\rho^2}\right)}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{I}{A}} = \min(\rho_x, \rho_y)$$

Snellezza λ

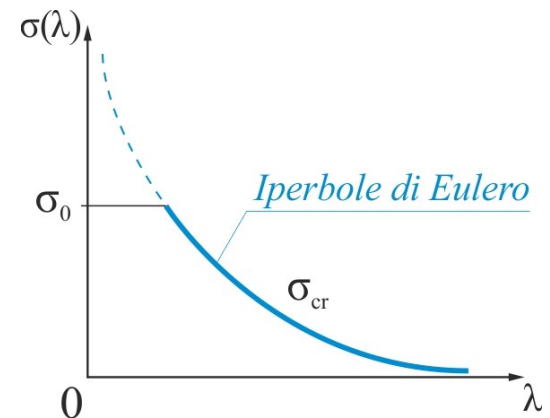
$$\lambda = \frac{l_0}{\rho}$$

Iperbole di Eulero

$$\sigma_{cr}(\lambda) = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}$$

Collasso per instabilità (failure due to buckling)

Se $\sigma_{cr}(\lambda) < \sigma_0$ allora si manifesta prima l'instabilità che l'uscita dalla fase elastica



Iperbole di Eulero

$$\sigma_{cr}(\lambda) = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}$$

Collasso per instabilità (failure due to buckling)

Se $\sigma_{cr}(\lambda) < \sigma_o$ allora si manifesta prima l'instabilità che l'uscita dalla fase elastica

Snellezza limite λ_0

$$\sigma_{cr}(\lambda_0) = \sigma_o = \pi^2 \frac{E}{\lambda_0^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_o}}$$

$$\sigma_{cr}(\lambda) < \sigma_o \quad \Rightarrow \quad \lambda > \lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_o}}$$

Travi snelle: $\lambda > \lambda_0$ **Travi tozze:** $\lambda < \lambda_0$

