

Meccanica delle Strutture

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/statica

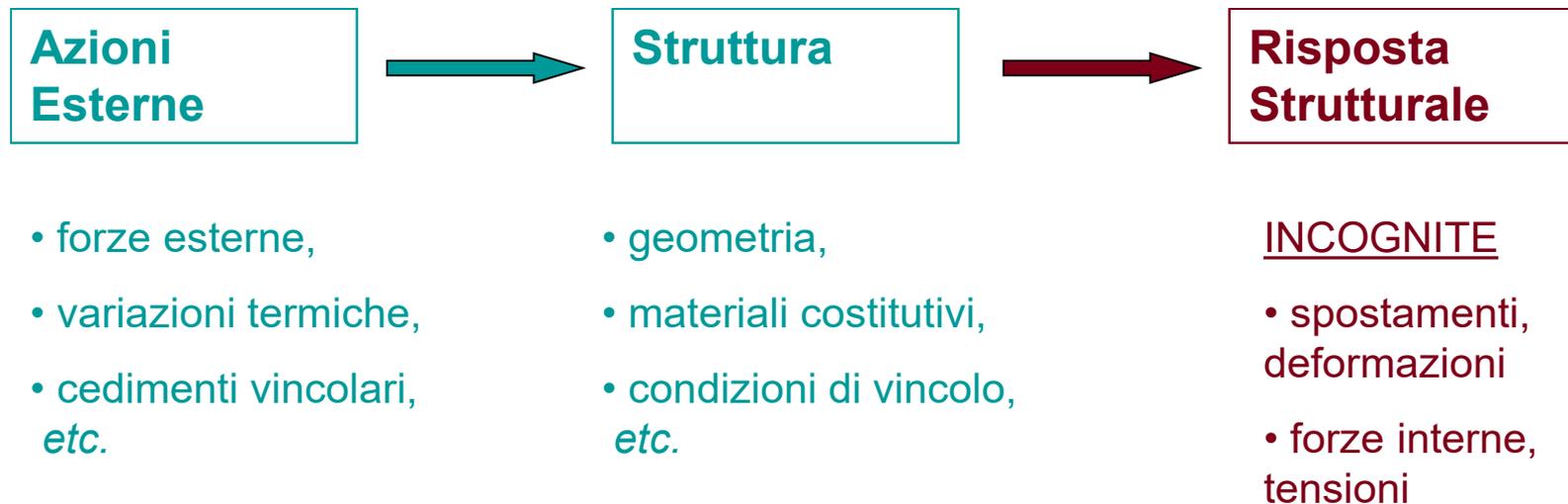
Testo di riferimento:

Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



2.1 Parole chiave

Analisi strutturale: analisi e caratterizzazione della *risposta strutturale* cioè del comportamento meccanico manifestato dalla struttura in risposta alle azioni esterne.

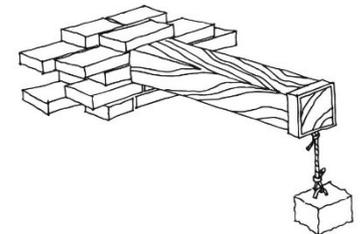
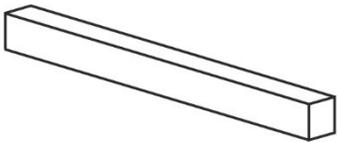




Lezione

Parte III - Il modello di trave elastica 1D

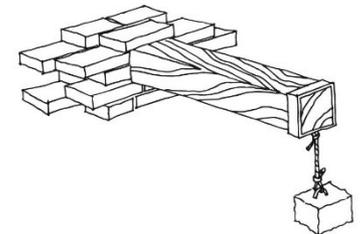
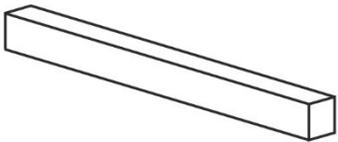
- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



Lezione

Parte III - Il modello di trave elastica 1D

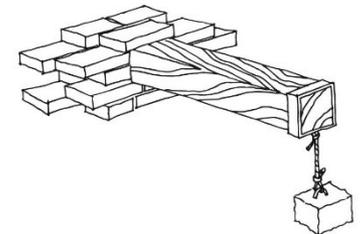
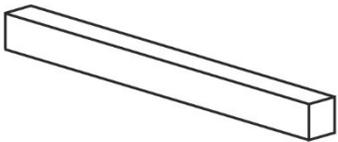
- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- **Dualità statico-cinematica: identità dei Lavori Virtuali**
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



Lezione

Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Dualità statico-cinematica: identità dei Lavori Virtuali
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



• RIEPILOGO CINEMATICA TRAVE

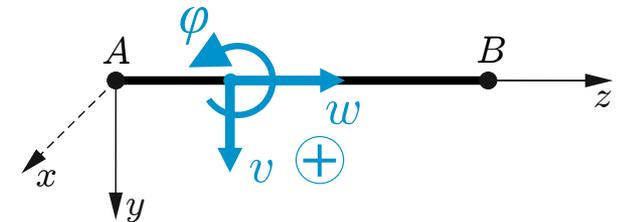
Misure di deformazione (piano zy): grandezze atte a misurare i cambiamenti di forma e/o di dimensione della trave a livello locale (generico concio di trave o sezione)

- Deformazione assiale $\varepsilon(z)$ [0]
- Scorrimento angolare $\gamma(z)$ [0]
- Curvatura flessionale $\chi(z)$ [L^{-1}]

Equazioni implicite di congruenza (piano zy): stabiliscono un legame differenziale fra spostamenti e rotazioni e misure di deformazione.

Forma scalare

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) + c.c. \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases}$$

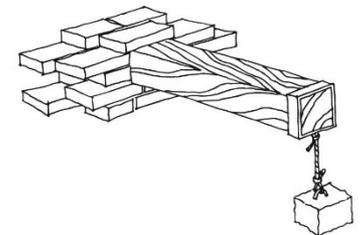
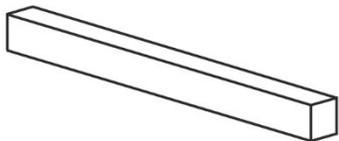


Sistema cinematicamente congruente

Lezione

Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- **Statica della trave**
- Dualità statico-cinematica: identità dei Lavori Virtuali
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



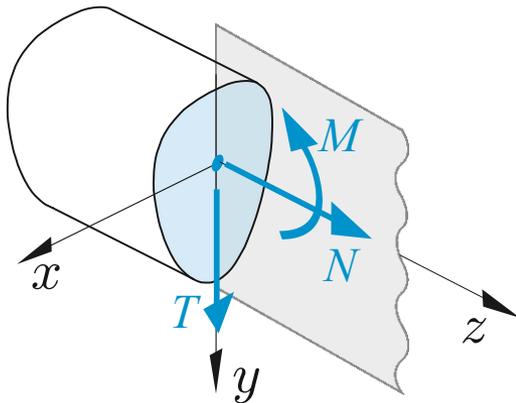
- RIEPILOGO STATICA TRAVE

Caratteristiche della sollecitazione: caso piano (zy)

$\mathbf{R}(z) = N(z)\mathbf{k} + T(z)\mathbf{j} \rightarrow$ Risultante delle forze interne $[F]$

$\mathbf{M}(z) = M(z)\mathbf{i} \rightarrow$ Momento risultante delle forze interne $[FL]$

$N(z), T(z), M(z) \rightarrow$ Caratteristiche della sollecitazione (obiettivo 1)



Faccia di normale positiva

Equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

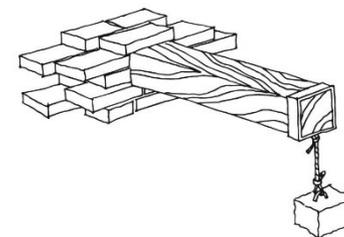
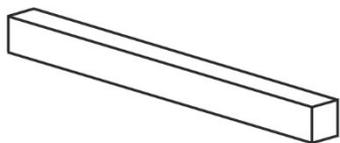
(obiettivo 2)

Sistema staticamente equilibrato

Lezione

Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- **Dualità statico-cinematica: identità dei Lavori Virtuali**
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico





Parte III - Il modello di trave elastica 1D

Identità dei Lavori Virtuali

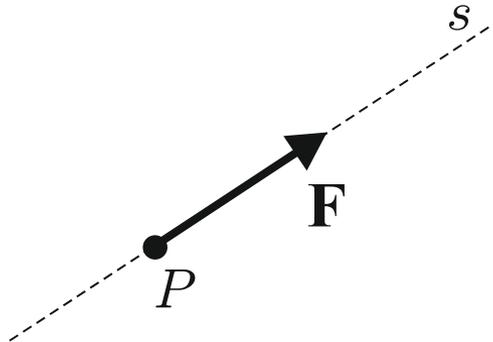
- **Obiettivi**
- **La grandezza fisica *lavoro*: definizioni**
- **Il *lavoro virtuale*:**
 - Lavoro Virtuale Esterno: definizione e interpretazione
 - Lavoro Virtuale Interno: definizione e interpretazione
- **Identità dei Lavori Virtuali: teorema dei LV**
 - Modello di trave rigida
 - Modello di trave deformabile
- **Applicazioni**
 - calcolo di spostamenti in strutture determinate
- **Esercizi (sito: E15; testo §10.5-10.6)**

Grandezza fisica 'Forza'

Unità di misura. L'unità di misura della forza nel S.I. è il Newton (N), definito come:

$$1 N = 1 \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

Tenendo conto del secondo principio della dinamica, possiamo quindi affermare che una forza di $1 N$ imprime ad un corpo con la massa di $1 kg$ l'accelerazione di $1 m/s^2$.



s: retta d'azione

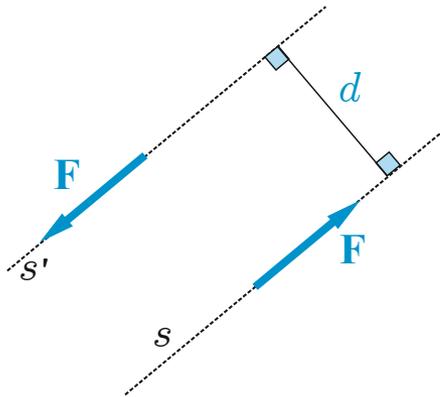
P: punto di applicazione

$|\mathbf{F}|, F$: modulo o intensità $[F]$

Dimensioni fisiche $[F]$, unità di misura N

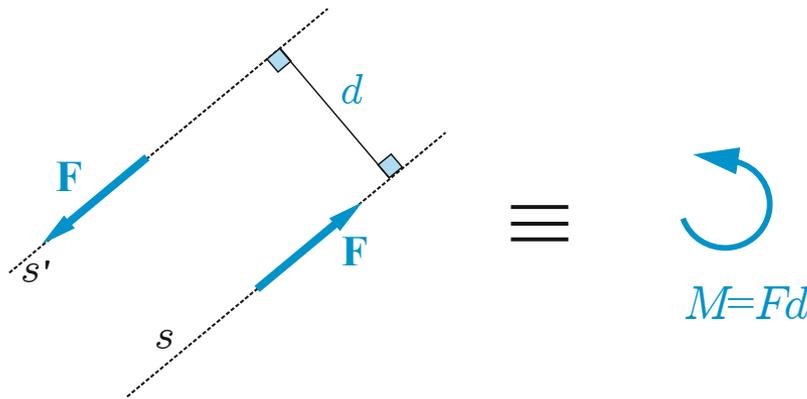
Coppia di forze

*Si definisce coppia di forze un sistema costituito da due forze (\mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2) che hanno: stessa direzione, stesso modulo, versi opposti; risulta quindi: $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$.
il momento risultante di una coppia di forze non dipende dal polo scelto.*

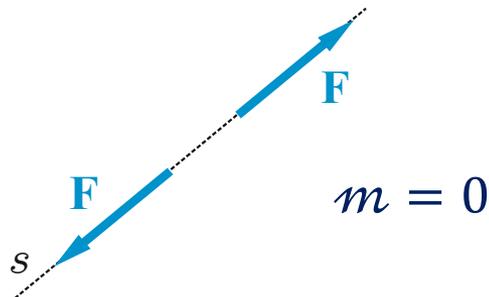


Coppia di forze

Si definisce coppia di forze un sistema costituito da due forze ($\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$) che hanno: stessa direzione, stesso modulo, versi opposti; risulta quindi: $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$.
il momento risultante di una coppia di forze non dipende dal polo scelto.



$$m = M_O = Fd$$



$$m = +Fd$$

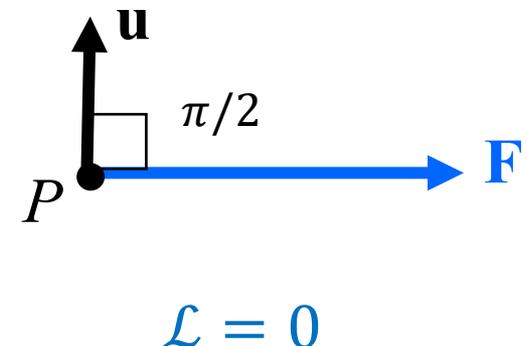
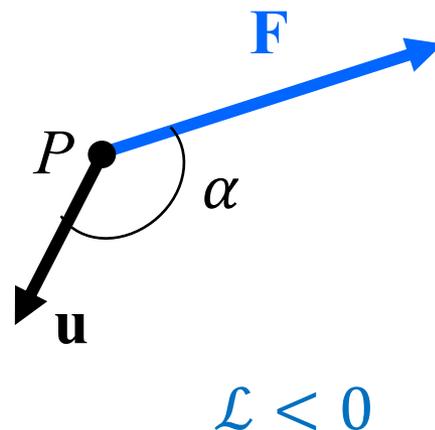
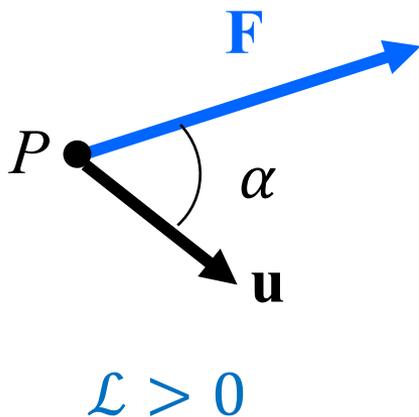
$$m = -Fd$$

Grandezza fisica 'Lavoro': lavoro di una forza sullo spostamento

Definizione. Si consideri una forza \mathbf{F} applicata in un punto P ; se il punto P compie uno spostamento \mathbf{u} , si definisce *lavoro* della forza \mathbf{F} sullo spostamento \mathbf{u} il prodotto scalare dei due vettori \mathbf{F} e \mathbf{u}

$$\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \quad \mathcal{L} = |\mathbf{F}||\mathbf{u}|\cos(\alpha)$$

- grandezza fisica scalare avente le dimensioni fisiche: $[\mathcal{L}] = [FL]$;
- il lavoro è positivo se l'angolo convesso α è acuto, negativo se è ottuso;
- il lavoro è nullo se \mathbf{F} e \mathbf{u} sono perpendicolari o se uno dei due vettori è nullo;
- se \mathbf{F} e \mathbf{u} sono paralleli, il lavoro è dato dal prodotto dei moduli dei due vettori moltiplicato per +1 o per -1 a seconda che i vettori siano concordi o discordi.



Grandezza fisica ‘Lavoro’: lavoro di una coppia sulla rotazione

Definizione. Si consideri una coppia \mathbf{m} applicata su un corpo rigido; se il corpo compie una rotazione rigida di rappresentata dal vettore $\boldsymbol{\theta}$, si definisce *lavoro* della coppia \mathbf{m} sulla rotazione $\boldsymbol{\theta}$ il prodotto scalare dei due vettori \mathbf{m} e $\boldsymbol{\theta}$

$$\mathcal{L} = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta} \quad \mathcal{L} = |\mathbf{m}| |\boldsymbol{\theta}| \cos(\alpha)$$

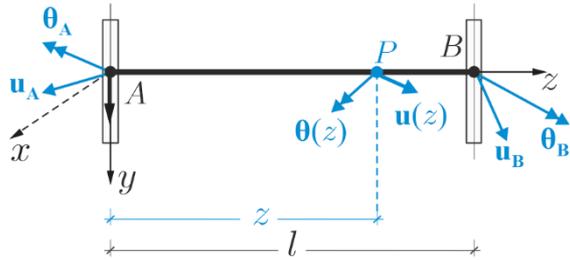
- grandezza fisica scalare avente le dimensioni fisiche: $[\mathcal{L}] = [FL]$;
- se \mathbf{m} e $\boldsymbol{\theta}$ sono paralleli, il lavoro è dato dal prodotto dei moduli dei due vettori moltiplicato per +1 o per -1 a seconda che i vettori siano concordi (nel piano perpendicolare alla loro comune direzione: coppia e rotazione entrambe orarie o entrambe antiorarie) o discordi (nel piano perpendicolare alla loro comune direzione: coppia e rotazione una orario e l'altra antioraria).

Grandezza fisica ‘Lavoro’: lavoro di un sistema di forze

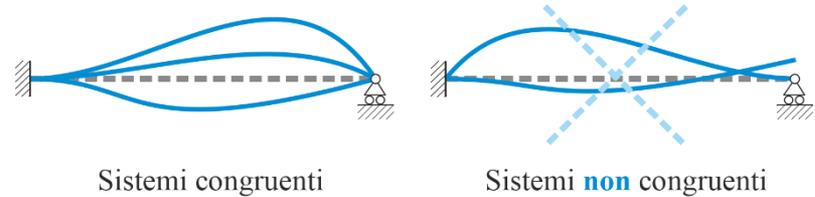
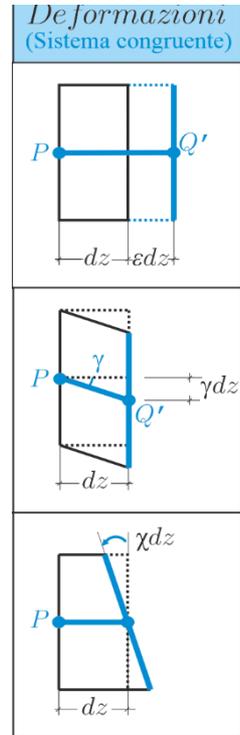
Definizione. Si consideri una trave o un sistema di travi in cui siano assegnate n forze applicate in altrettanti punti della linea d’asse e r coppie applicate in altrettante sezioni rigide; se il sistema si sposta o si deforma si definisce lavoro del sistema di forze e coppie sul campo di spostamenti la seguente grandezza:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^r \mathbf{m}_j \cdot \boldsymbol{\theta}_j$$

Spostamenti e deformazioni in un sistema congruente

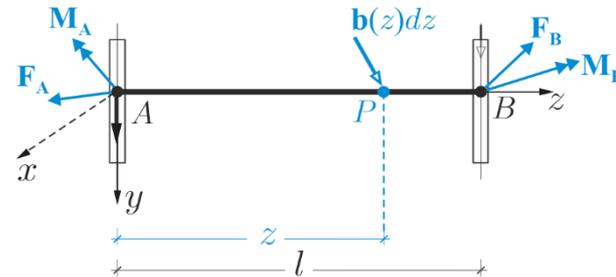


Sistema Congruente

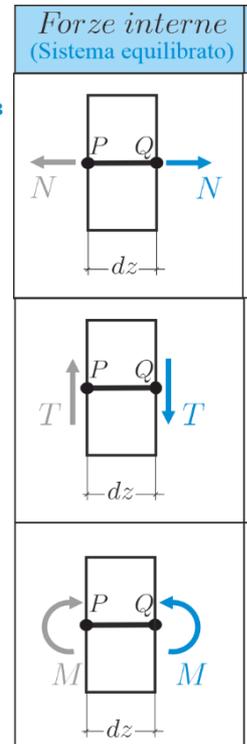


$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) + c.c. \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases}$$

Forze esterne e forze interne in un sistema equilibrato

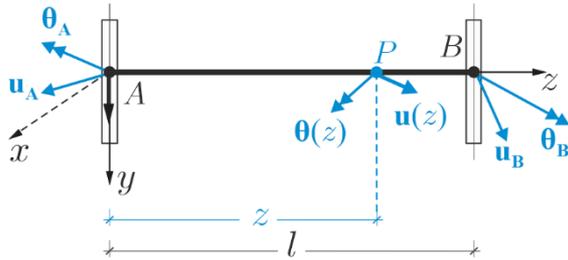


Sistema Equilibrato



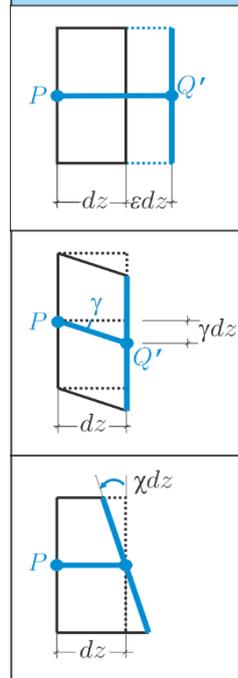
$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c. c.$$

Il 'Lavoro Virtuale'

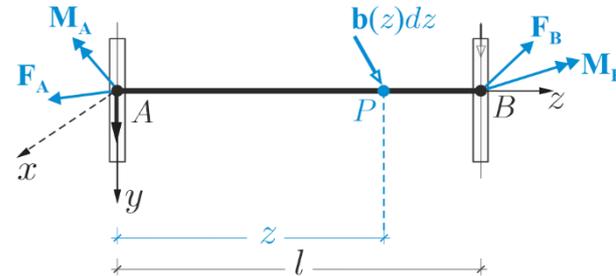


Sistema Congruente

Deformazioni
(Sistema congruente)

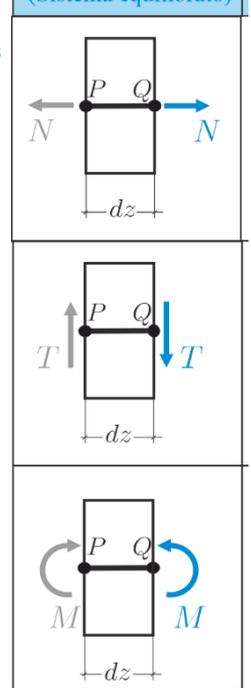


$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) + c.c. \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases}$$



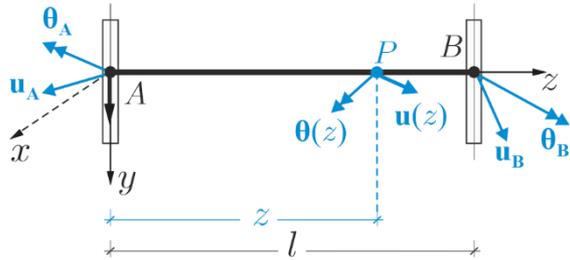
Sistema Equilibrato

Forze interne
(Sistema equilibrato)

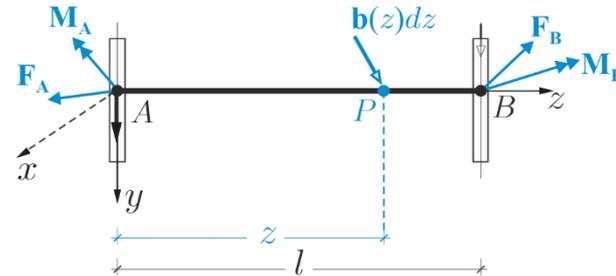


$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 + c.c. \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases}$$

Il 'Lavoro Virtuale Esterno'

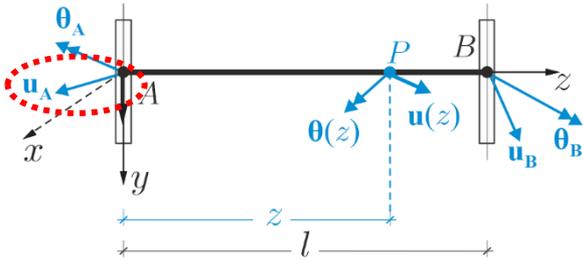


Sistema Congruente

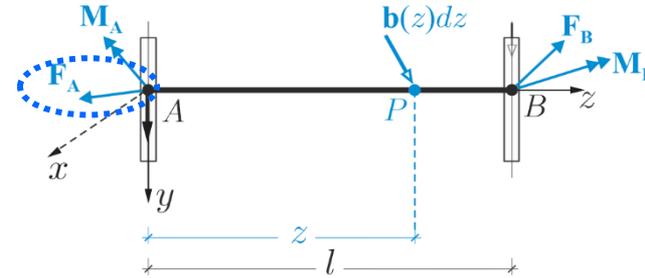


Sistema Equilibrato

Il 'Lavoro Virtuale Esterno'



Sistema Congruente

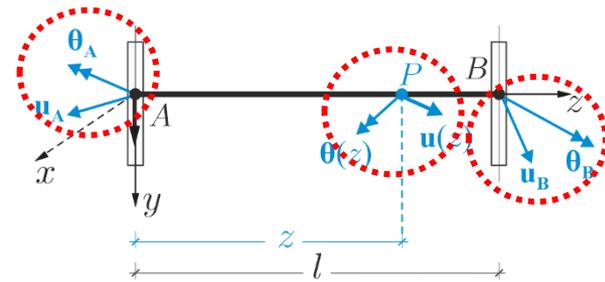


Sistema Equilibrato

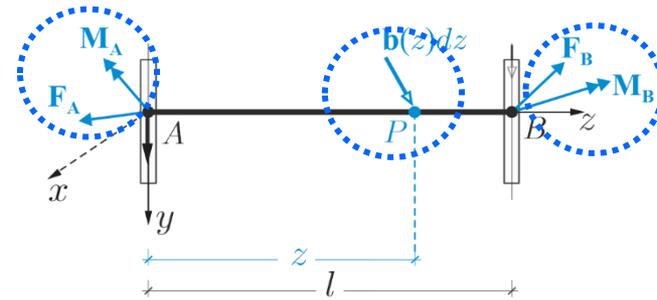
Definizione. Lavoro che le forze *esterne* (forze attive e reazioni vincolari) del **Sistema Equilibrato** compiono sugli spostamenti del **Sistema Congruente**

$$\mathcal{L}_v^e = \mathbf{F}_A \cdot \mathbf{u}_A + \dots$$

Il 'Lavoro Virtuale Esterno'



Sistema Congruente



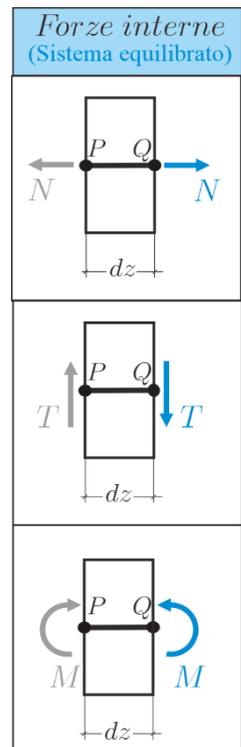
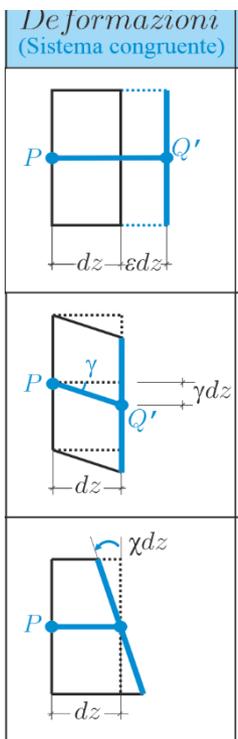
Sistema Equilibrato

Definizione. Lavoro che le forze *esterne* (forze attive e reazioni vincolari) del **Sistema Equilibrato** compiono sugli spostamenti del **Sistema Congruente**

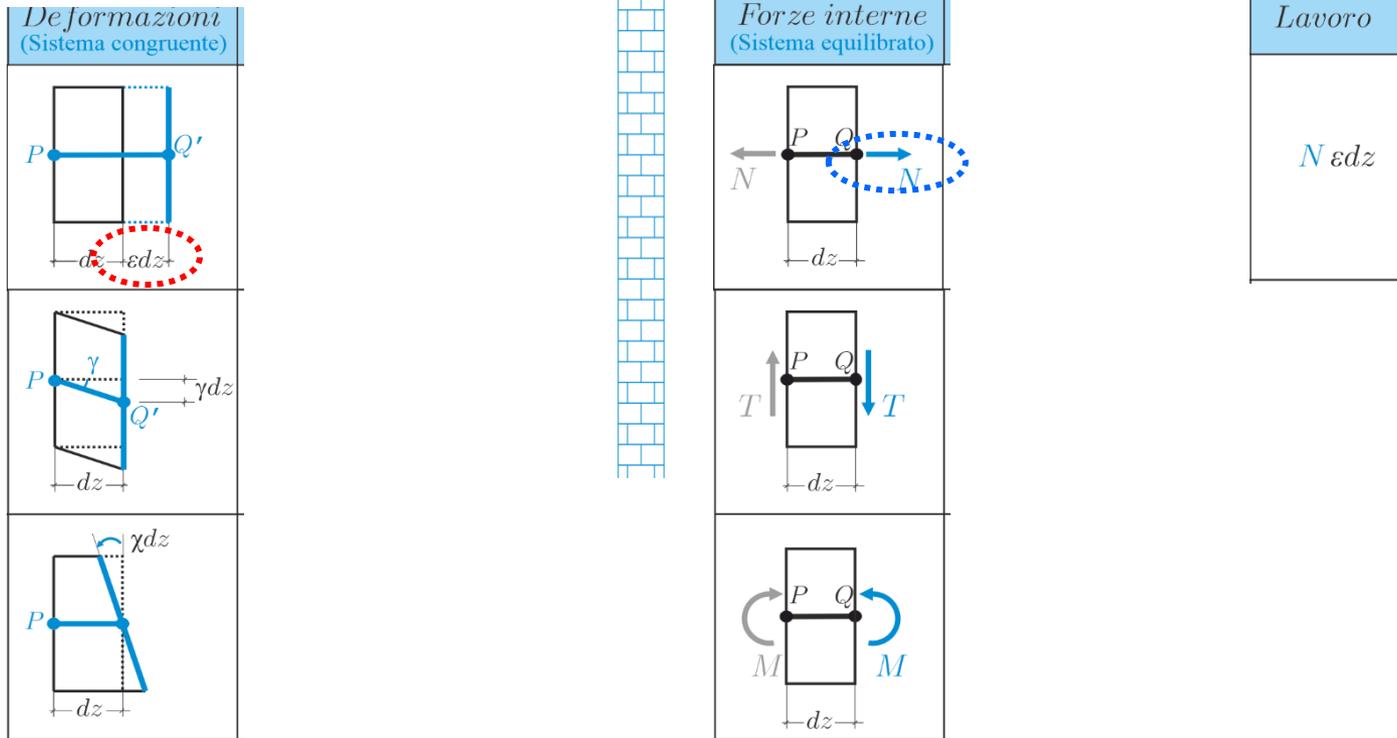
$$\mathcal{L}_v^e = \mathbf{F}_A \cdot \mathbf{u}_A + \mathbf{M}_A \cdot \boldsymbol{\theta}_A + \mathbf{F}_B \cdot \mathbf{u}_B + \mathbf{M}_B \cdot \boldsymbol{\theta}_B + \int_0^l \mathbf{b} dz \cdot \mathbf{u}$$



Il 'Lavoro Virtuale Interno'



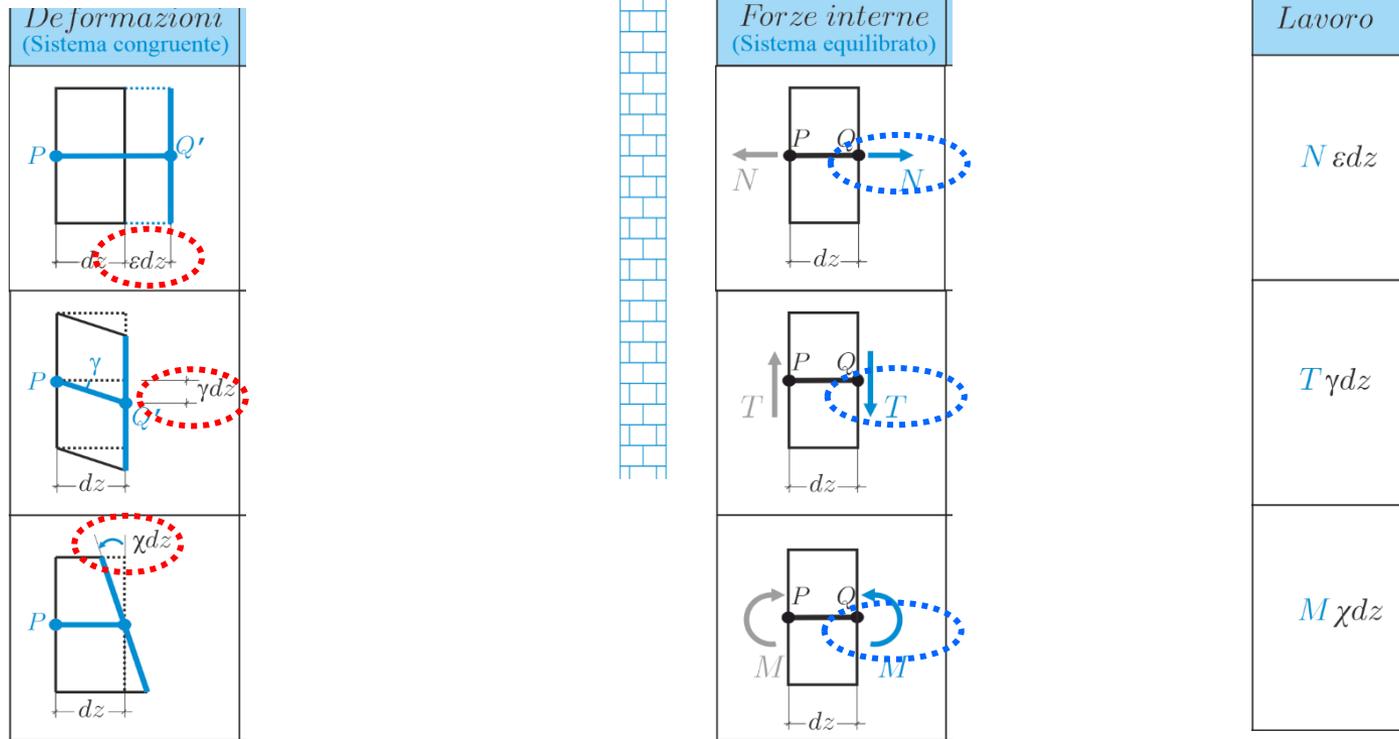
Il 'Lavoro Virtuale Interno'



Definizione. Lavoro che le forze *interne* (caratteristiche della sollecitazione) del **Sistema Equilibrato** compiono sulle deformazioni del **Sistema Congruente**

$$\mathcal{L}_v^i = \int_0^l N \varepsilon dz + \dots$$

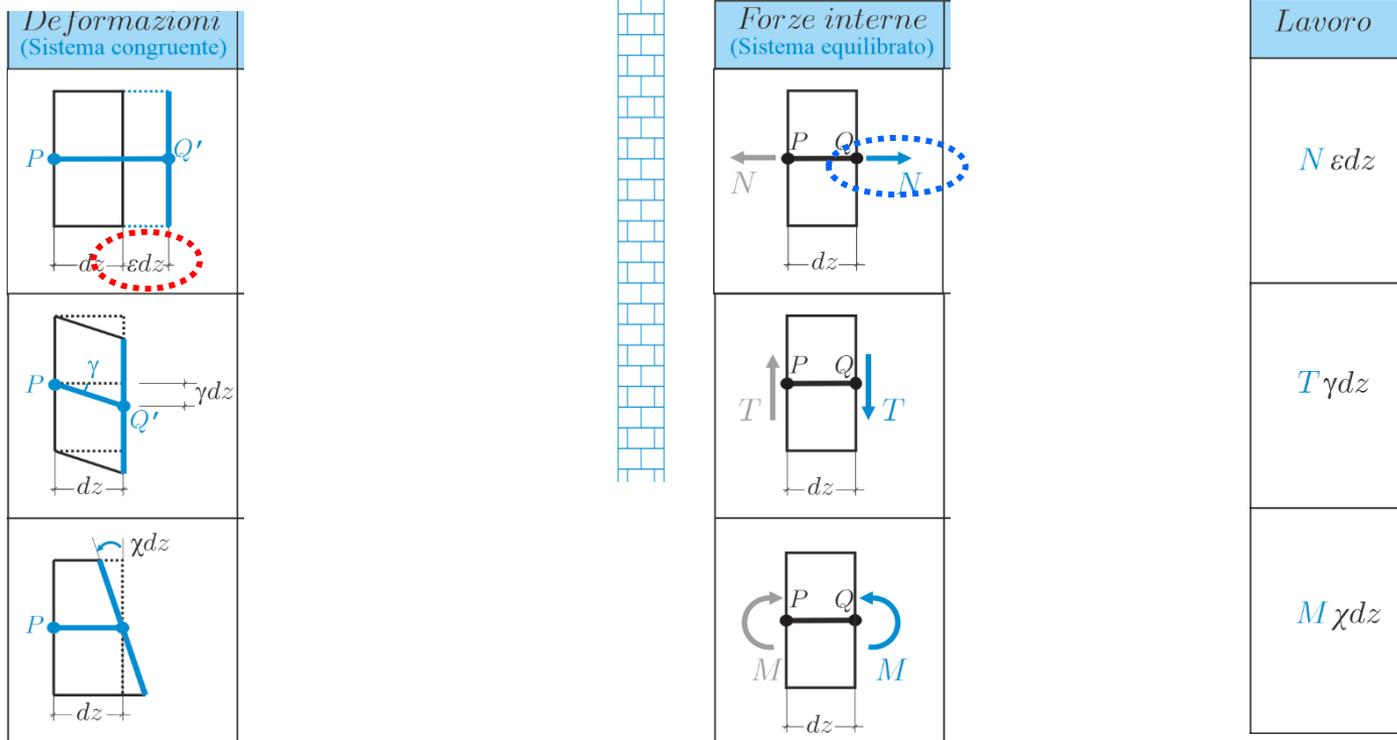
Il 'Lavoro Virtuale Interno'



Definizione. Lavoro che le forze *interne* (caratteristiche della sollecitazione) del **Sistema Equilibrato** compiono sulle deformazioni del **Sistema Congruente**

$$\mathcal{L}_v^i = \int_0^l [N \varepsilon dz + T \gamma dz + M \chi dz]$$

Il 'Lavoro Virtuale Interno'



Definizione. Lavoro che le forze *interne* (caratteristiche della sollecitazione) del **Sistema Equilibrato** compiono sulle deformazioni del **Sistema Congruente**

$$\mathcal{L}_v^i = \int_0^l [N(z) \varepsilon(z) + T(z) \gamma(z) + M(z) \chi(z)] dz$$

IDENTITA' DEI LAVORI VIRTUALI (LV)

Assegnato un **Sistema Equilibrato** e indipendentemente da esso un **Sistema Congruente** sussiste la seguente identità:

$$\mathcal{L}_v^e = \mathcal{L}_v^i$$

$$F_A \cdot u_A + M_A \cdot \theta_A + F_B \cdot u_B + M_B \cdot \theta_B + \int_0^l \mathbf{b} dz \cdot \mathbf{u} = \int_0^l [N(z) \varepsilon(z) + T(z) \gamma(z) + M(z) \chi(z)] dz$$