

*Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza*

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:

Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Lezione

Parte IV - Il Problema di Saint Venant

- Obiettivi, Generalità
- 1. Forza normale centrata
- 2. Flessione retta (flessione uniforme retta)
- 3a. Flessione deviata (flessione uniforme deviata)
- 3b. Tensoflessione
- 3c. Forza normale eccentrica
- **4. Flessione e taglio (flessione non uniforme)**
- 5. Torsione uniforme

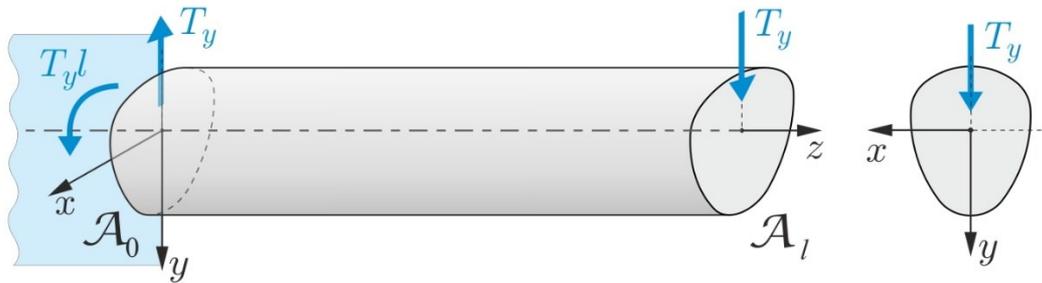
Lezione

4. Flessione e Taglio

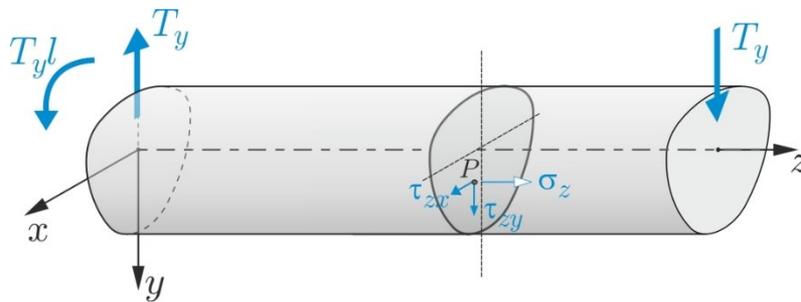
- **Posizione del problema**
- **Ipotesi sulla soluzione (tensioni)**
- **Tensioni normali**
- **Tensioni tangenziali**
- **Teoria approssimata di Jourawsky**
- **Esercizi (sito: E17-18, testo: §21.10-21.11)**

4. Flessione e Taglio

Posizione del problema



Ipotesi sulla soluzione (tensioni)

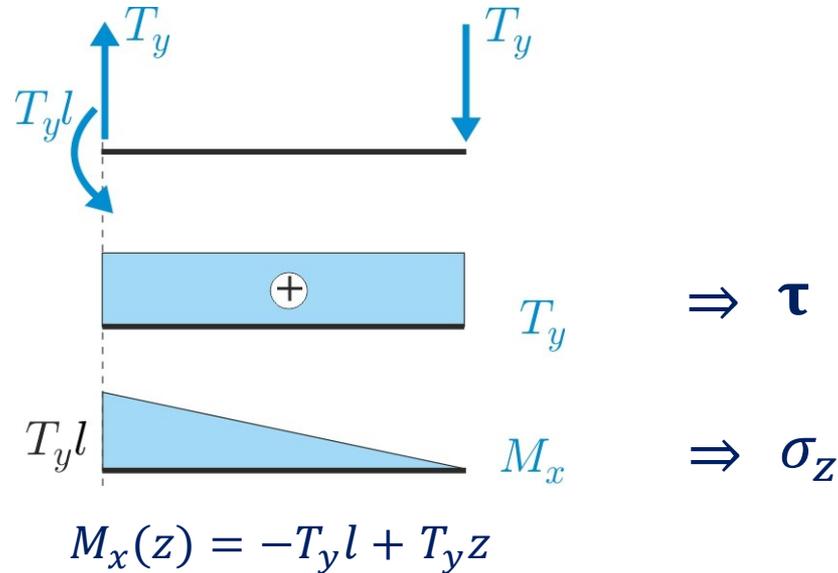
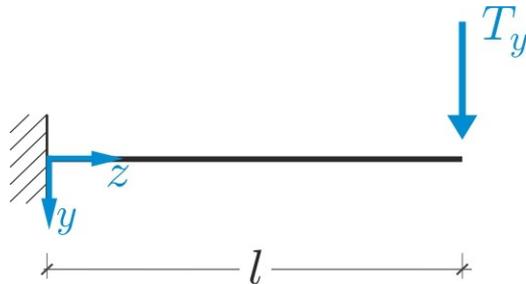


$$T(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$\sigma_z \neq 0$
 $\tau \neq 0$

4. Flessione e Taglio

Modello 1D



Tensioni normali σ_z

Formula di Navier

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

$$M_x(z) = -T_y l + T_y z$$

$$\sigma_z(y, z) = \frac{M_x(z)}{I_x} y = -\frac{T_y}{I_x} y(l - z)$$

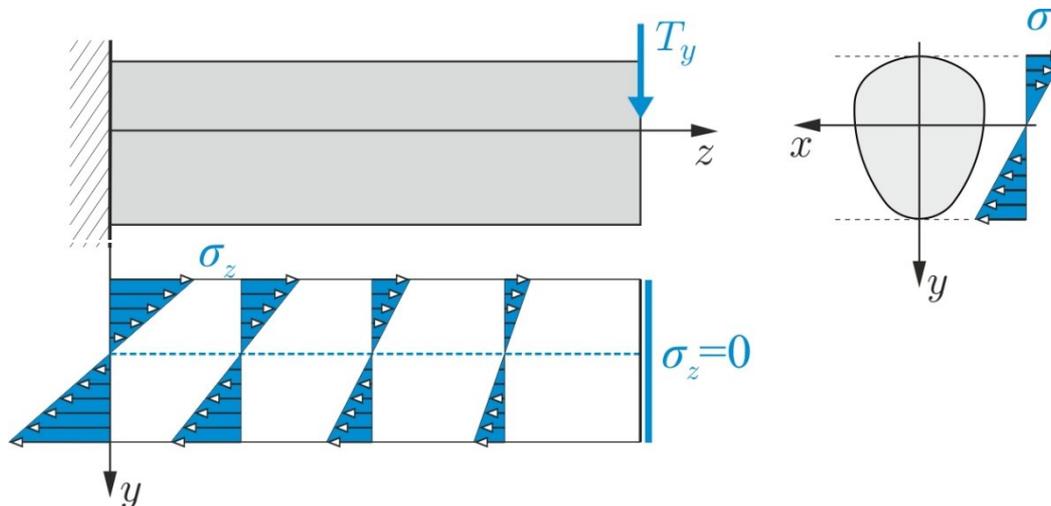
4. Flessione e Taglio

Tensioni normali σ_z

$$\sigma_z(y, z) = -\frac{T_y}{I_x} (l - z)y \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{T_y}{I_x} y$$

$$\sigma_z(y, 0) = -\frac{T_y}{I_x} l y \quad \sigma_z(y, l) = 0$$

Tensioni normali σ_z : rappresentazione grafica



4. Flessione e Taglio

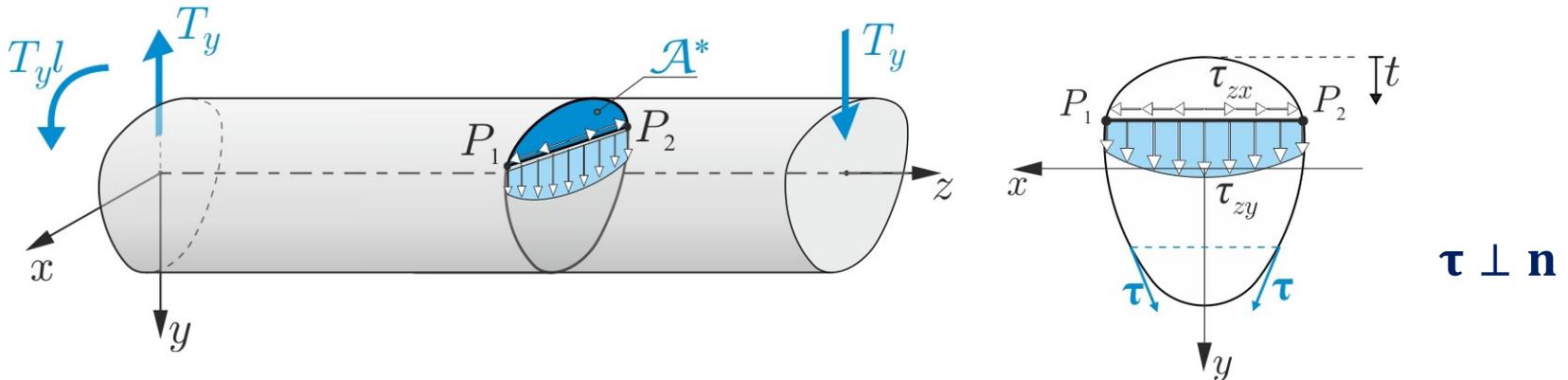
Tensioni tangenziali τ

Problema Saint Venant: equazioni indefinite di equilibrio

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{zx}(x, y)\mathbf{i} + \tau_{zy}(x, y)\mathbf{j} = \mathbf{cost}_z$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\frac{T_y}{I_x} y}$$

$$c.c. \text{ su } \Gamma \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma}$$



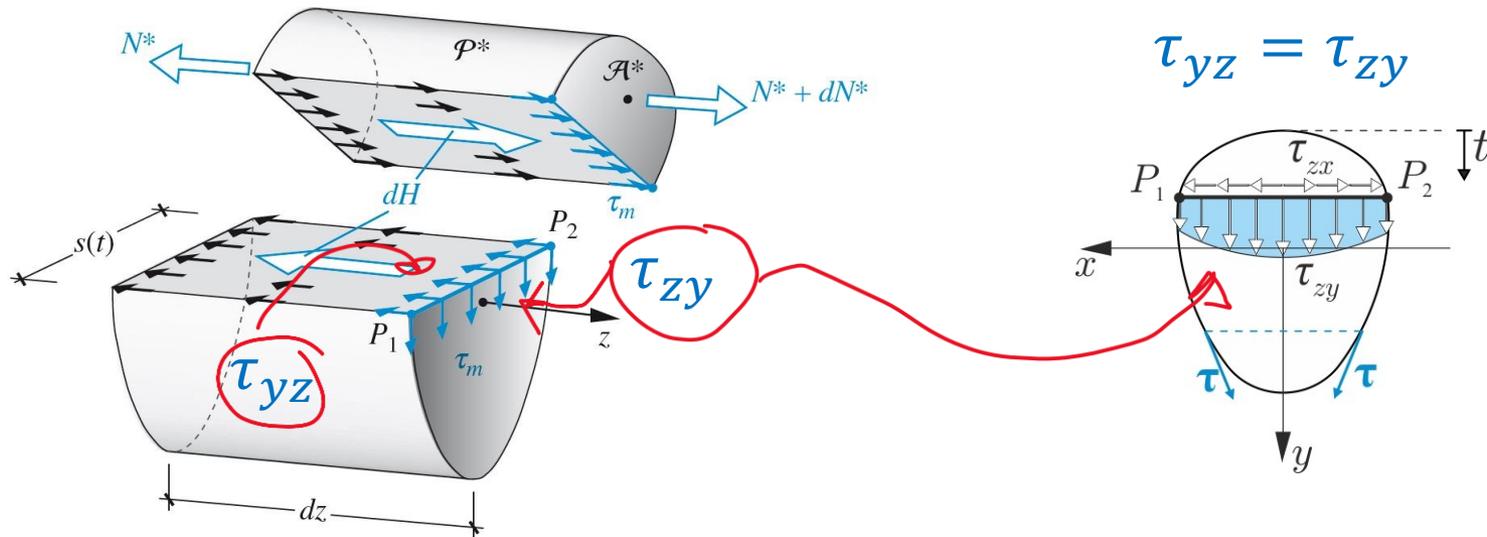
4. Flessione e Taglio

Tensioni tangenziali τ : reciprocità delle tensioni tangenziali

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

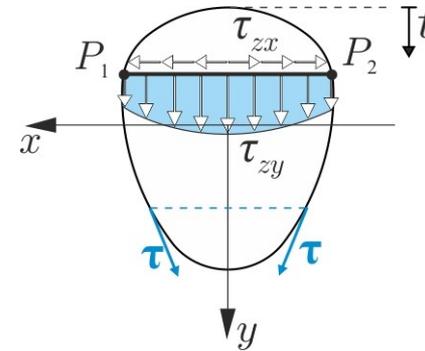
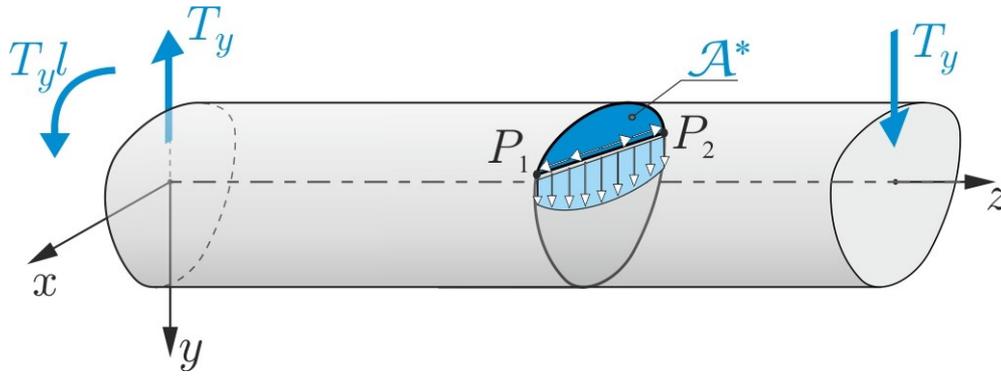
$$\mathbf{m} \perp \mathbf{n} \Rightarrow \tau_{m n} = \tau_{n m}$$



4. Flessione e Taglio

Tensioni tangenziali τ : soluzione esatta

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\frac{T_y}{I_x} y \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma$$

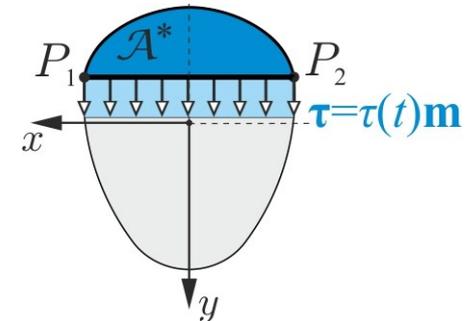
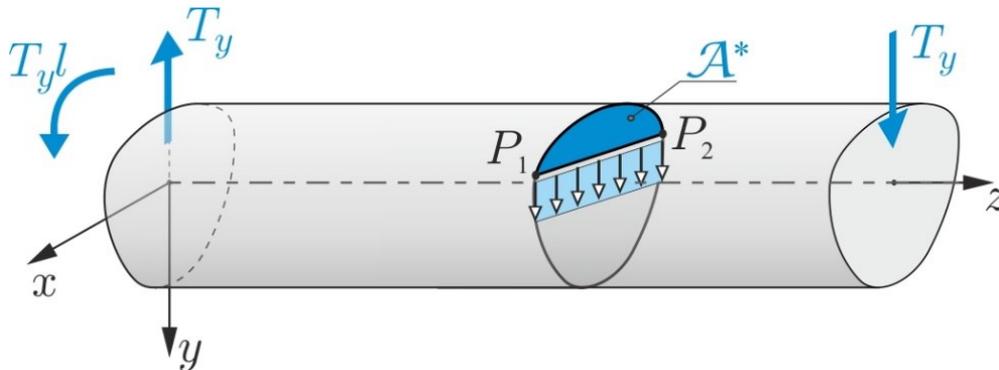


$$\overline{P_1 P_2} = s$$

$$\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{n}$$

Tensioni tangenziali τ : valor medio sulla corda

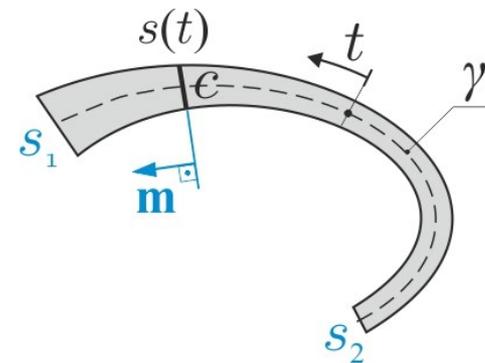
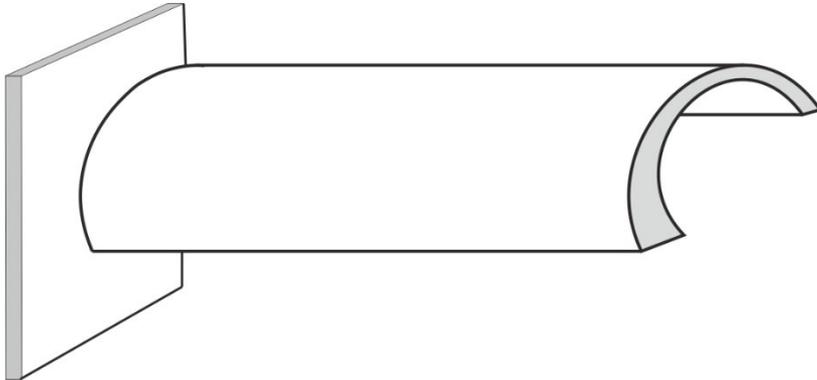
$$\tau_m = \frac{1}{s} \int_{-s/2}^{s/2} \tau_{zy} dx$$



4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Tensioni tangenziali τ nei prismi di SV a sezione sottile

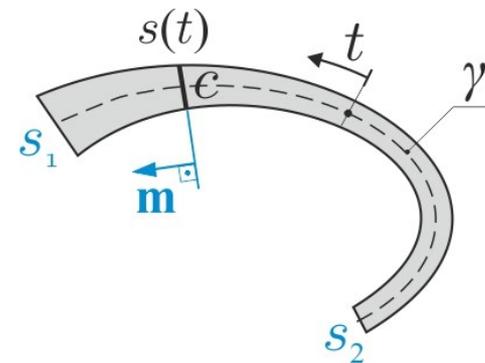
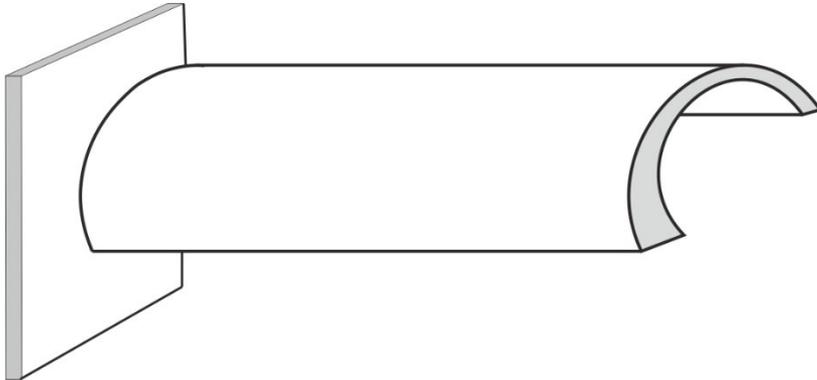
*Geometria: le sezioni di piccolo spessore sono figure piane descritte da un segmento (**corda c**) che si muove nel piano mantenendosi perpendicolare alla traiettoria descritta dal proprio punto medio (**linea media γ**), la lunghezza della linea media risultando sempre sempre molto maggiore della lunghezza della corda.*



4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Tensioni tangenziali τ nei prismi di SV a sezione sottile

*Geometria: le sezioni di piccolo spessore sono figure piane descritte da un segmento (**corda c**) che si muove nel piano mantenendosi perpendicolare alla traiettoria descritta dal proprio punto medio (**linea media γ**), la lunghezza della linea media risultando sempre sempre molto maggiore della lunghezza della corda.*



γ : linea media

c : corda (segmento perpendicolare alla linea media)

t : ascissa locale

\mathbf{m} : versore perpendicolare alla corda e orientato concordemente all'ascissa locale

$s(t)$: lunghezza della corda detta spessore (costante o variabile con t)

$$mis(\gamma) := a$$

$$s \ll a$$

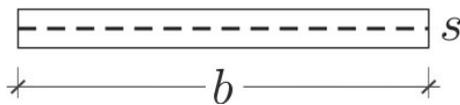
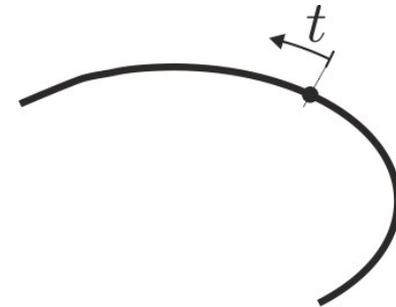
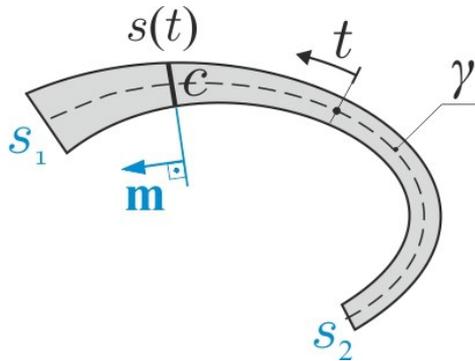
$$0 \leq t \leq a$$

$$mis(c) := s(t)$$

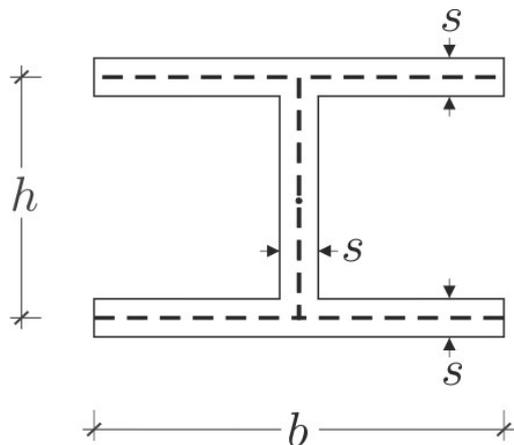
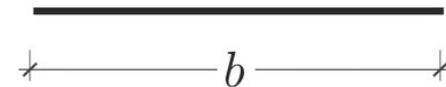
4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Teoria approssimata di Jourawsky

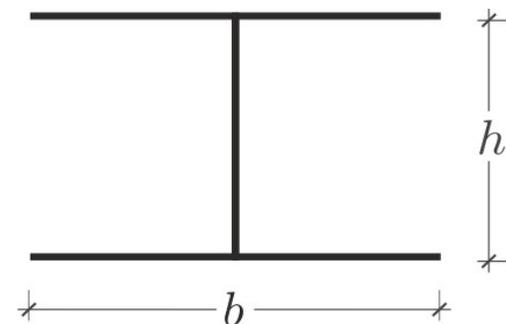
Sezioni di piccolo spessore (sezioni sottili $s \ll a$): rappresentazione



$$a = b$$



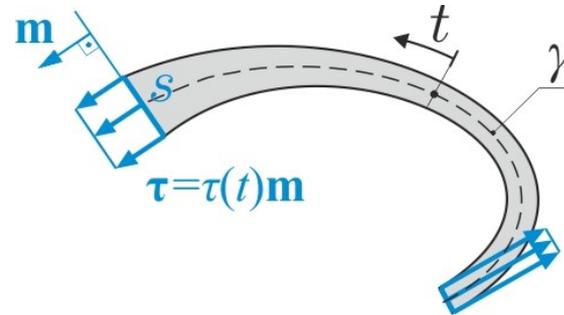
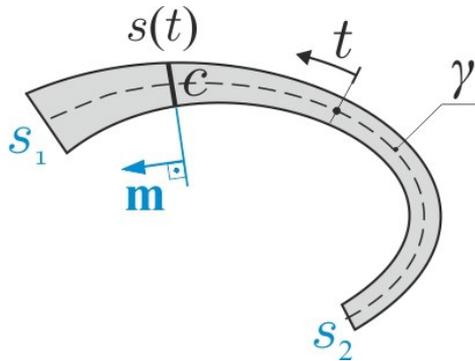
$$a = 2b + h$$



4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Teoria approssimata di Jourawsky

Ipotesi



Ipotesi 1: il vettore delle tensioni tangenziali τ è parallelo alla linea media e quindi perpendicolare alla corda

$$\tau \parallel m$$

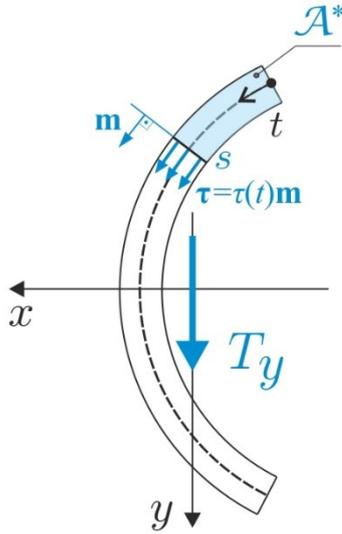
Ipotesi 2: il vettore delle tensioni tangenziali τ è costante lungo la corda, il suo modulo dipende quindi dalla sola ascissa locale t :

$$\tau = \tau(t)m$$

Formula di Jourawsky: *verso e modulo* del vettore delle tensioni tangenziali è fornito dalla formula approssimata di Jourawsky

4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Formula di Jourawsky: taglio T_y



$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$$

$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = -\frac{T_y S_x^*(t)}{I_x s(t)}$$

\mathbf{m} : versore uscente perpendicolare alla corda t : ascissa locale sulla linea media

$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$: vettore delle tensioni tangenziali; concorde con \mathbf{m} se $\tau(t) > 0$ $[FL^{-2}]$

T_y : forza di taglio, positiva se concorde con l'asse locale y . $[F]$

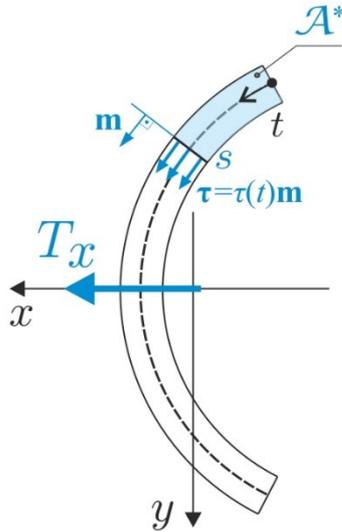
I_x : momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse locale x ($I_x > 0$) $[L^4]$

s : lunghezza della corda c , spessore ($s > 0$) $[L]$

S_x^* : momento statico della porzione \mathcal{A}^* rispetto a x ; positivo se G^* è dalla parte delle y positive $[L^3]$

4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Formula di Jourawsky: taglio T_x



$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t) \mathbf{m}$$

$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = - \frac{T_x S_y^*(t)}{I_y s(t)}$$

\mathbf{m} : versore uscente perpendicolare alla corda t : ascissa locale sulla linea media

$\boldsymbol{\tau} = \tau(t) \mathbf{m}$: vettore delle tensioni tangenziali; concorde con \mathbf{m} se $\tau(t) > 0$ $[FL^{-2}]$

T_x : forza di taglio, positiva se concorde con l'asse locale x . $[F]$

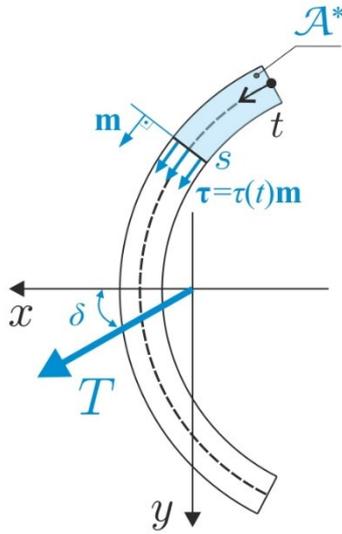
I_y : momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse locale y ($I_y > 0$) $[L^4]$

s : lunghezza della corda c , spessore ($s > 0$) $[L]$

S_y^* : momento statico della porzione \mathcal{A}^* rispetto a y ; positivo se G^* è dalla parte delle x positive $[L^3]$

4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Formula di Jourawsky: taglio deviato T



$$T_x = T \cos \delta, \quad T_y = T \sin \delta$$

$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t) \mathbf{m}$$

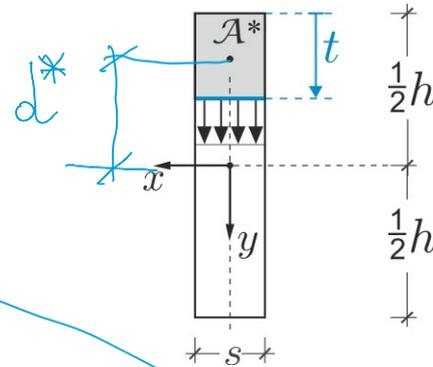
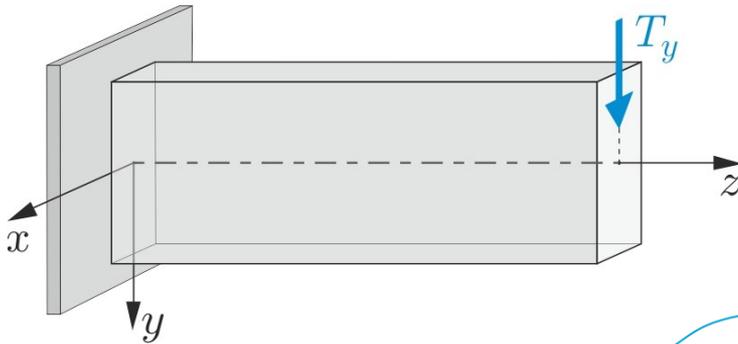
$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = -\frac{T_x S_y^*(t)}{I_y s(t)} - \frac{T_y S_x^*(t)}{I_x s(t)}$$

\mathbf{m} : versore uscente perpendicolare alla corda t : ascissa locale sulla linea media

$\boldsymbol{\tau} = \tau(t) \mathbf{m}$: vettore delle tensioni tangenziali; concorde con \mathbf{m} se $\tau(t) > 0$ $[FL^{-2}]$

4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Sezioni rettangolare sottile



$$I_x = \frac{1}{12} s h^3$$

$$\tau(t) = \tau \cdot m = - \frac{T_y S_x^*(t)}{I_x s}$$

$$S_x^*(t) = A^* d^* = - (s t) \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)$$

$$\Rightarrow S_x^*(t) = -st \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)$$

$$\tau(t) = \frac{T_y}{I_x} t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)$$

$$\tau(0) = 0$$

$$\tau(h) = 0$$

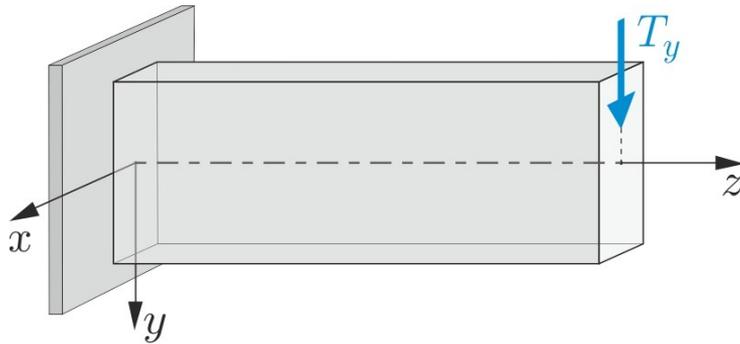
$$\tau_{max} = \tau\left(\frac{1}{2}h\right) = \frac{T_y h^2}{8I_x}$$

4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Sezioni rettangolare sottile

$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$$

$$\tau(t) = \frac{T_y}{I_x} t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)$$

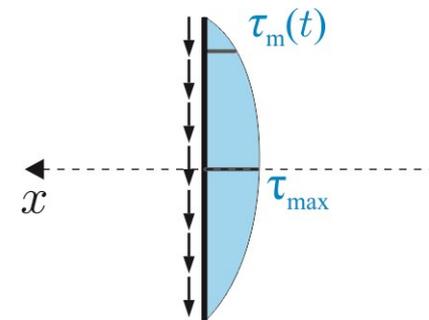
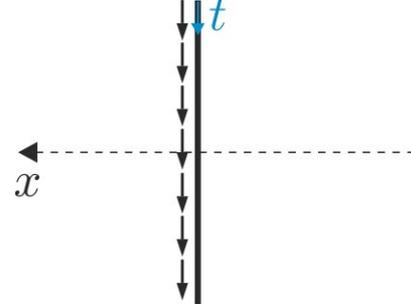
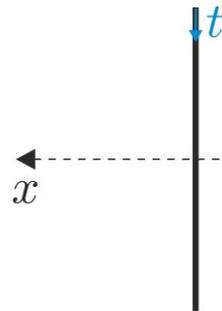
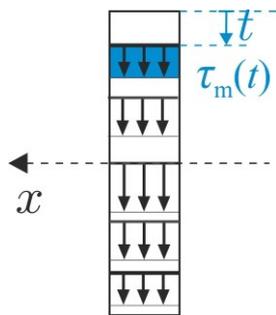


$$\tau(0) = 0$$

$$\tau(h) = 0$$

$$\tau_{max} = \frac{T_y h^2}{8I_x}$$

Tensioni tangenziali: rappresentazione grafica



4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Osservazioni generali (testo § 21.4.4)

Si riassumono nel seguito gli aspetti salienti della teoria approssimata di Jourawsky, valida per sezioni di piccolo spessore:

1. le tensioni tangenziali dovute al taglio, distribuite allo stesso modo in ogni sezione del cilindro, sono dirette parallelamente alla linea media e sono costanti lungo lo spessore. Verso e intensità lungo la linea media si ricavano utilizzando la formula di Jourawsky.
2. il *flusso delle tensioni tangenziali* dovute al taglio, definito come $q(t) = s(t)\tau_m(t)$, non è costante lungo la linea media (come nel caso della torsione uniforme), ma varia *in modo continuo* con t .
3. il campo delle tensioni tangenziali *non è solenoidale* poiché la sua divergenza è diversa da zero e varia da punto a punto nella sezione; le linee di flusso sono quindi generalmente aperte.
4. in corrispondenza agli estremi liberi della sezione le tensioni tangenziali e i relativi flussi sono nulli.
5. le tensioni tangenziali raggiungono il valore massimo in corrispondenza dell'asse neutro (nei casi visti finora è l'asse x).
6. nei tratti paralleli all'asse x le tensioni variano linearmente, nei tratti paralleli all'asse y le tensioni variano secondo una legge quadratica.
7. la trattazione sin qui svolta non si modifica se l'asse principale y non è di simmetria per la sezione, e si estende immediatamente al caso in cui la forza tagliante è parallela all'asse principale x .

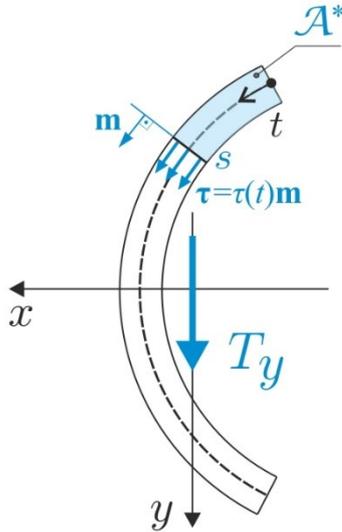
Lezione

4. Flessione e Taglio

- Posizione del problema
- Ipotesi sulla soluzione (tensioni)
- Tensioni normali
- Tensioni tangenziali
- Teoria approssimata di Jourawsky
 - **Dimostrazione della formula di Jourawsky**
- Esercizi (sito: E17-18, testo: §21.10-21.11)

4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Formula di Jourawsky: taglio T_y



$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$$

$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = -\frac{T_y S_x^*(t)}{I_x s(t)}$$

$$S_x^*(t) = \int_{A^*} y dA$$

\mathbf{m} : versore uscente perpendicolare alla corda t : ascissa locale sulla linea media

$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$: vettore delle tensioni tangenziali; concorde con \mathbf{m} se $\tau(t) > 0$ $[FL^{-2}]$

T_y : forza di taglio, positiva se concorde con l'asse locale y . $[F]$

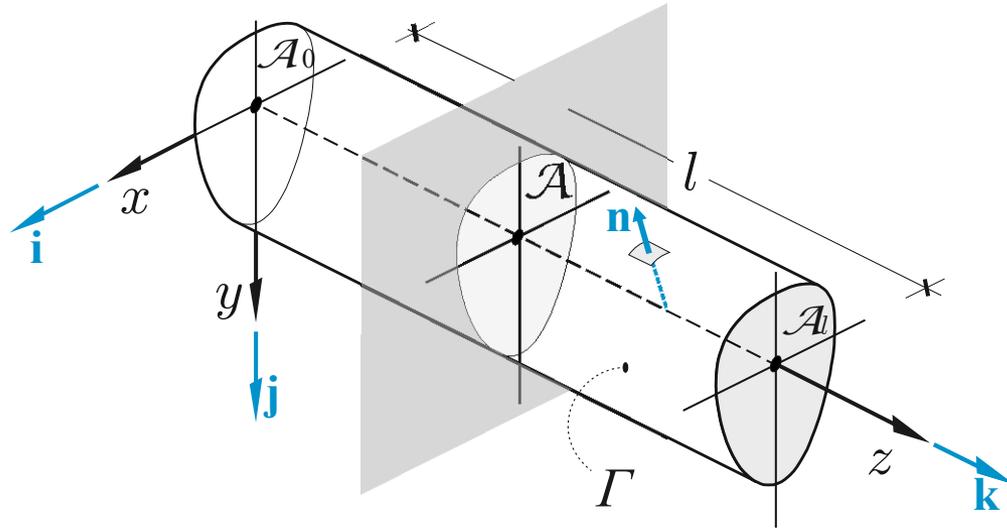
I_x : momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse locale x ($I_x > 0$) $[L^4]$

s : lunghezza della corda c , spessore ($s > 0$) $[L]$

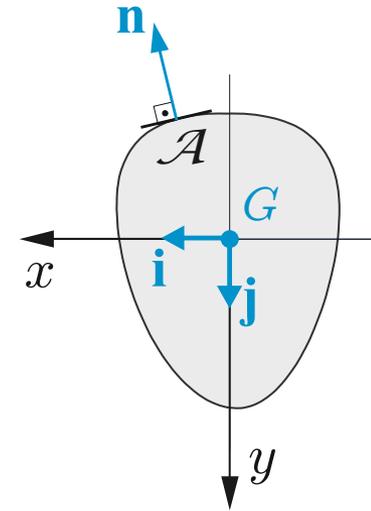
S_x^* : momento statico della porzione \mathcal{A}^* rispetto a x ; positivo se G^* è dalla parte delle y positive $[L^3]$

4. Flessione e Taglio

Dimostrazione della formula di Jourawsky

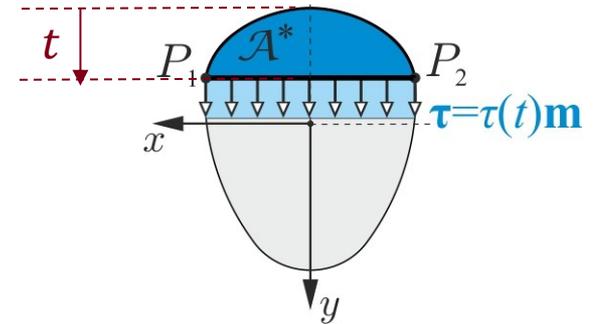
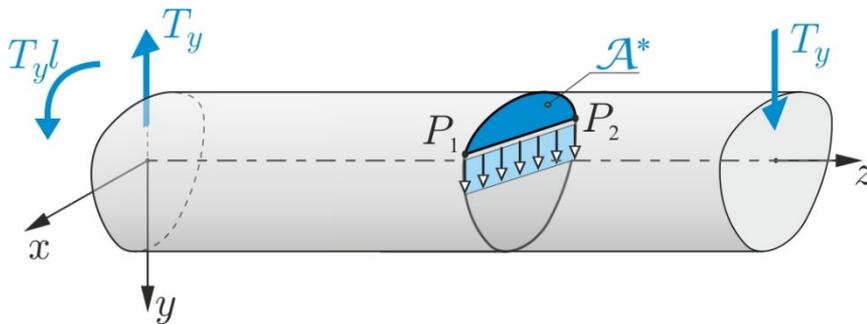


Mantello Γ : versore normale uscente n



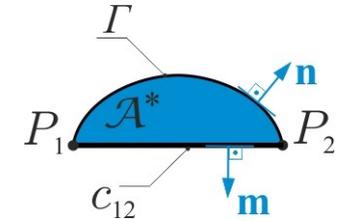
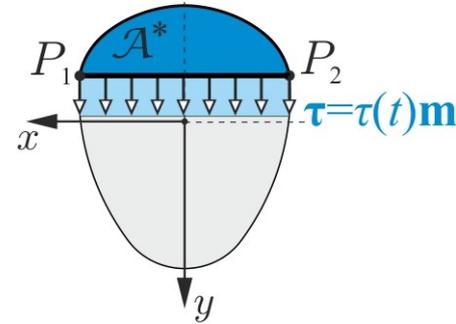
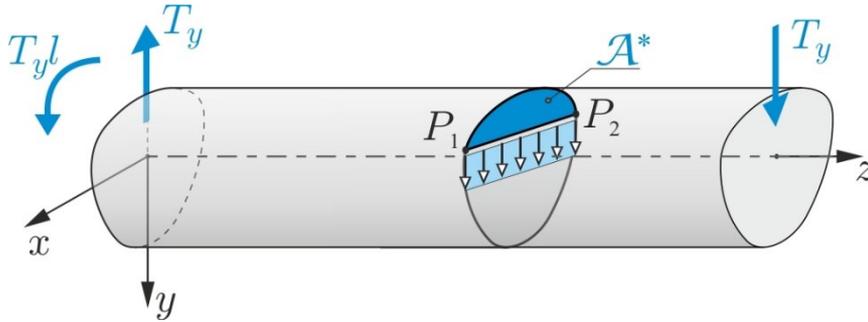
Sezione generica \mathcal{A}

x, y assi centrali principali d'inerzia



4. Flessione e Taglio

Dimostrazione della formula di Jourawsky



$$\text{Frontiera: } \partial \mathcal{A}^* = \Gamma \cup c_{12}$$

$$\text{Normali uscenti : } \mathbf{n}^* \quad \mathbf{n} \quad \mathbf{m}$$

4. Flessione e Taglio

Dimostrazione della formula di Jourawsky

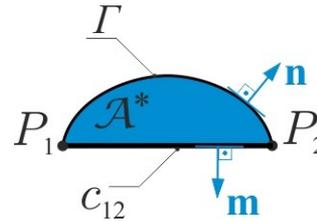
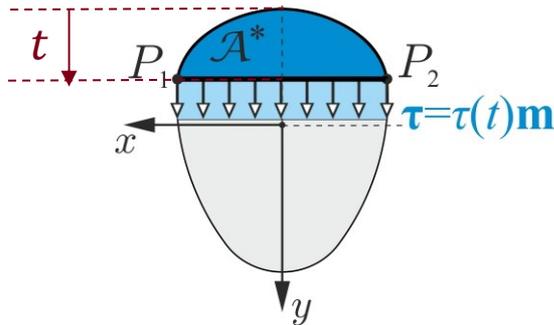
Problema Saint Venant: equazioni indefinite di equilibrio

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$$

 \Rightarrow

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\frac{T_y}{I_x} y$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma$$



$$\int_{A^*} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} dA = \int_{A^*} \left(-\frac{T_y}{I_x} y \right) dA$$

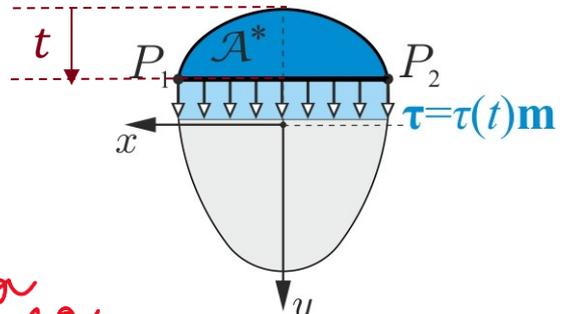
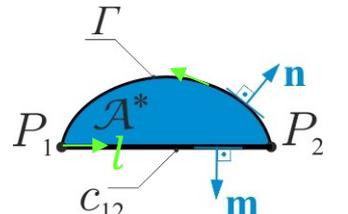
$$\int_{A^*} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} dA = -\frac{T_y}{I_x} \int_{A^*} y dA$$

$$\int_{A^*} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} dA = -\frac{T_y}{I_x} S_x^*(t)$$

4. Flessione e Taglio

Dimostrazione della formula di Jourawsky

$\partial \mathcal{A}^* = \Gamma \cup c_{12}$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $\mathbf{n}^* \quad \mathbf{n} \quad \mathbf{m}$

$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m}$
 $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma$

Teorema di divergenza

$\int_{\mathcal{A}^*} \text{div } \boldsymbol{\tau} dA = -\frac{T_y}{I_x} S_x^*(t)$

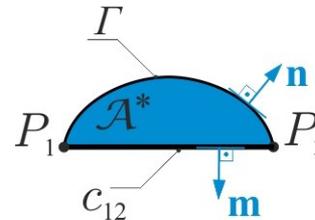
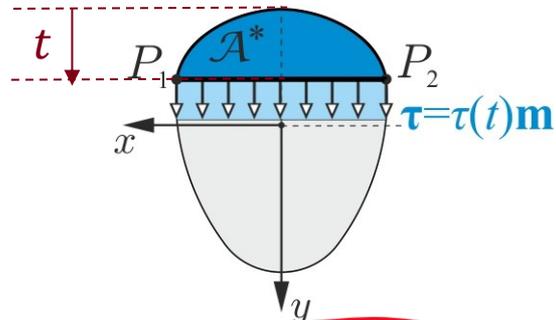
$\int_{\mathcal{A}^*} \text{div } \boldsymbol{\tau} dA = \oint_{\partial \mathcal{A}^*} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}^* dl$

$\int_{\mathcal{A}^*} \text{div } \boldsymbol{\tau} dA = \int_{c_{12}} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} dl + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dl$

$$\int_{\mathcal{A}^*} \text{div } \boldsymbol{\tau} dA = \int_{c_{12}} \tau(t) dl = \tau(t) \int_{c_{12}} dl = \tau(t) \text{mis}(c_{12}) = \tau(t) s(t)$$

4. Flessione e Taglio

Dimostrazione della formula di Jourawsky



$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m}$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma$$

$$\int_{\mathcal{A}^*} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} dA = -\frac{T_y}{I_x} S_x^*(t)$$

$$\int_{\mathcal{A}^*} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} dA = \tau(t) s(t)$$

$$\tau(t) s(t) = -\frac{T_y}{I_x} S_x^*(t)$$

$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = -\frac{T_y S_x^*(t)}{I_x s(t)}$$