Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*, CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Lezione

Parte IV - Il Problema di Saint Venant

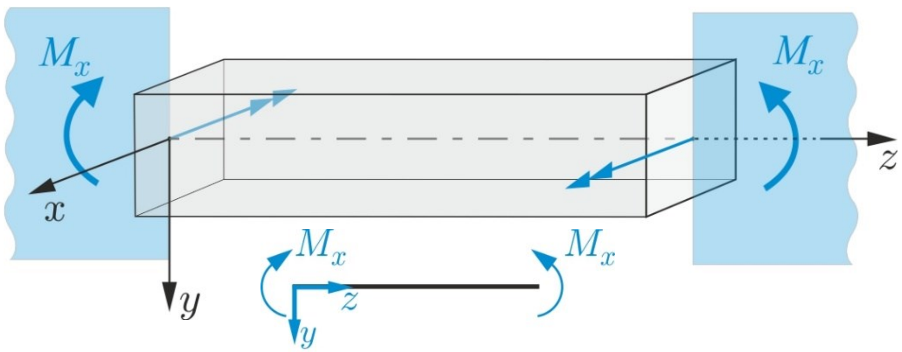
- Obiettivi, Generalità
- 1. Forza normale centrata
- **2. Flessione retta (flessione uniforme retta)**
- 3a. Flessione deviata (flessione uniforme deviata)
- 3b. Tensoflessione
- 3c. Forza normale eccentrica
- 4. Flessione e taglio (flessione non uniforme)
- 5. Torsione uniforme

2. Flessione retta (flessione uniforme) M_x (o M_y)

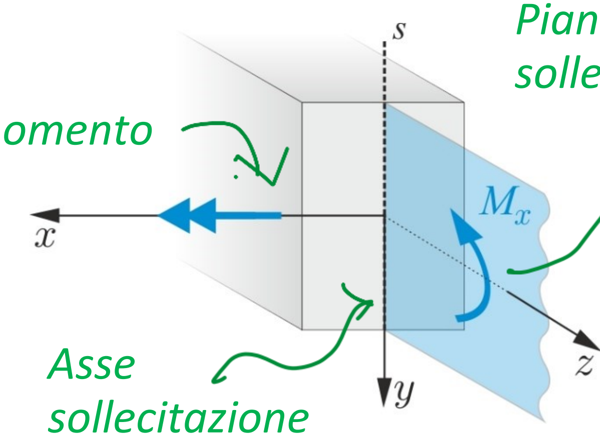
- **Posizione del problema**
- **Ipotesi sulla soluzione (tensioni)**
- **Formulazione analitica e soluzione**
- **Flessione retta M_y**
- **Esercizi** (sito: E16, testo: §18.4-18.6)

2. Flessione retta M_x

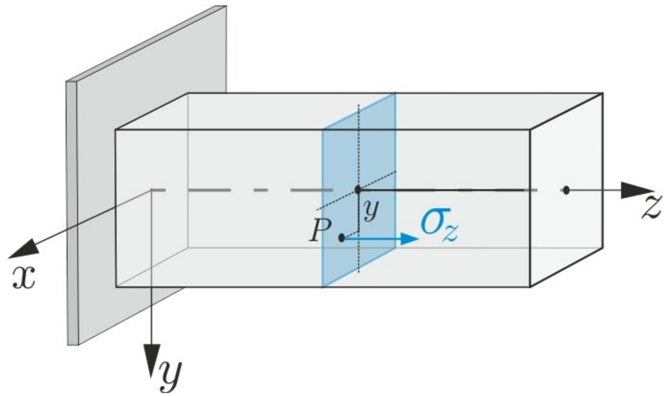
Posizione del problema



$N = T_x = T_y = 0$
$M_x \neq 0$, $M_y = M_z = 0$



Ipotesi sulla soluzione (tensioni)



$$\sigma_z(P) = ky$$

$$\tau_{zy}(P) = \tau_{zx}(P) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$T(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ky \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$$

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

2. Flessione retta M_x: formulazione analitica

INCOGNITE:

Forma compatta

Incognite cinematiche

$$\mathbf{u}(P),\ \mathbf{E}(P)$$

Incognite statiche

$$\mathbf{T}(P)$$

Forma scalare
(sistema di riferimento locale)

Incognite cinematiche

$$u(P),\ v(P),\ w(P)$$

$$\varepsilon_x(P),\ \varepsilon_y(P),\ \varepsilon_z(P)$$

$$\gamma_{zy}(P),\ \gamma_{zx}(P)$$

Incognite statiche

$$\sigma_z(y) = ky$$

$$\tau_{zy}(P) = 0,\ \tau_{zx}(P) = 0$$

1. Problema SV: formulazione analitica

Equazioni implicite di congruenza

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \ + c.c.$$

Equazioni indefinite di equilibrio

$$\boldsymbol{\tau} = \ \tau_{zx}(x,y)\mathbf{i} + \tau_{zy}(x,y)\mathbf{j} = \boldsymbol{cost_z}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}, P \in \mathcal{C}$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma$$

$$N = \int_{\mathcal{A}} \sigma_z dA \qquad T_x = \int_{\mathcal{A}} \tau_{zx} dA \qquad T_y = \int_{\mathcal{A}} \tau_{zy} dA \qquad P \in \mathcal{A}$$

$$M_x = \int_{\mathcal{A}} \sigma_z y dA \qquad M_y = -\int_{\mathcal{A}} \sigma_z x dA \qquad M_t = \int_{\mathcal{A}} (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA$$

Legge generalizzata di Hooke

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \qquad \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \qquad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z \qquad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{zy}$$

2. Flessione retta M_x

Equazioni indefinite di equilibrio

$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{cost_z}$ *Verificato* ✓

$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z}$ *Verificato* ✓

$= \emptyset$ $= \emptyset$

Soluzione ipotizzata (tensioni)

$$\boxed{\begin{gathered}\sigma_z = ky \\ \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}\end{gathered}}$$

Condizioni al contorno sul mantello

$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma$ *Verificato* ✓

2. Flessione retta M_x

Equazioni di equivalenza statica

$N = T_x = T_y = 0$
$M_x \neq 0,\ M_y = M_z = 0$

Soluzione ipotizzata (tensioni)

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_z &= ky \\ \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{0}\end{aligned}}$$

$$N = \int_{\mathcal{A}} \sigma_z dA = \int_{\mathcal{A}} ky dA = k \int_{\mathcal{A}} y dA = kS_x = 0$$ Verificato ✓

$$T_x = \int_{\mathcal{A}} \tau_{zx} dA = 0$$ Verificato ✓

$$T_y = \int_{\mathcal{A}} \tau_{zy} dA = 0$$ Verificato ✓

$$M_x = \int_{\mathcal{A}} \sigma_z y dA = \int_{\mathcal{A}} k y^2 dA = k \int_{\mathcal{A}} y^2 dA = kI_x$$ Verificato se $k = \frac{M_x}{I_x}$ ✓

$$M_y = \int_{\mathcal{A}} \sigma_z x dA = \int_{\mathcal{A}} kxy dA = k \int_{\mathcal{A}} xy dA = kI_{xy} = 0$$ Verificato ✓

$$M_t = \int_{\mathcal{A}} (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA = 0$$ Verificato ✓

soluzione

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{M_x}{I_x} y \\ \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{0}\end{aligned}}$$

2. Flessione retta M_x

soluzione

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$$

Legge generalizzata di Hooke

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \frac{M_x}{EI_x} y \qquad \varepsilon_z = \frac{M_x}{EI_x} y \qquad \gamma_{zx} = 0 \quad \gamma_{zy} = 0$$

Verificate ✓

Equazioni implicite di congruenza

$$u = -\nu \frac{M_x}{EI_x} xy + \cdots \quad v = -\nu \frac{M_x}{EI_x}\left[z^2 + \nu\left(y^2 - x^2\right)\right] y + \cdots \qquad w = \frac{M_x}{EI_x} yz + \cdots$$

Verificate ✓

2. Flessione retta M_x

Soluzione in forma chiusa

Spostamenti e deformazioni

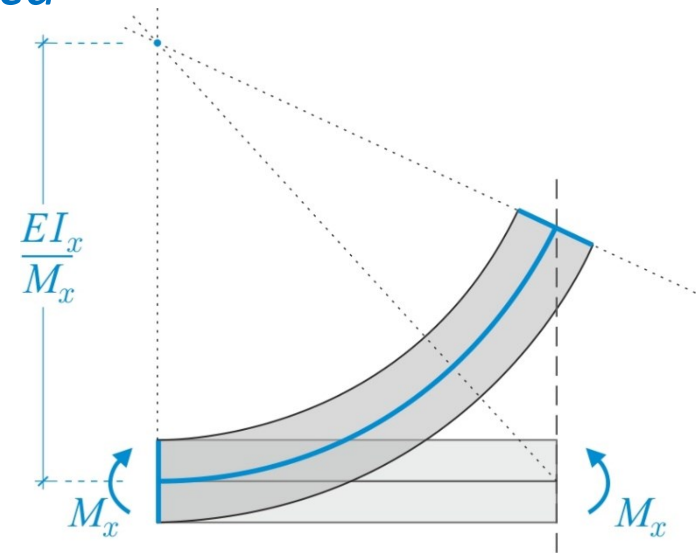
$$u = -\nu \frac{M_x}{EI_x} xy + \cdots \qquad v = -\frac{M_x}{EI_x}\left[z^2 + \nu\left(y^2 - x^2\right)\right]y + \cdots \qquad w = \frac{M_x}{EI_x} yz + \cdots$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \frac{M_x}{EI_x} y \qquad \varepsilon_z = \frac{M_x}{EI_x} y \qquad \gamma_{zx} = 0 \quad \gamma_{zy} = 0$$

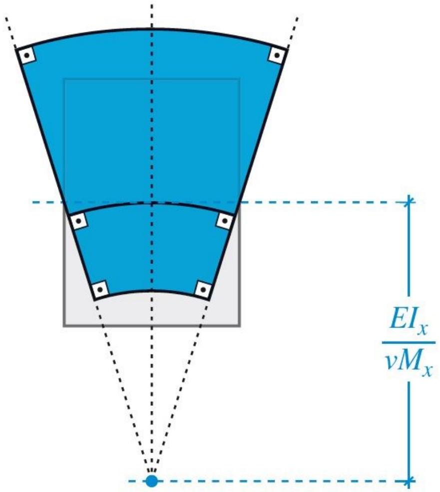
Rappresentazione grafica

VEDI TRAVE 1D

$$\chi_x = \frac{M_x}{EI_x}$$



Deformazione della sezione



2. Flessione retta M_x

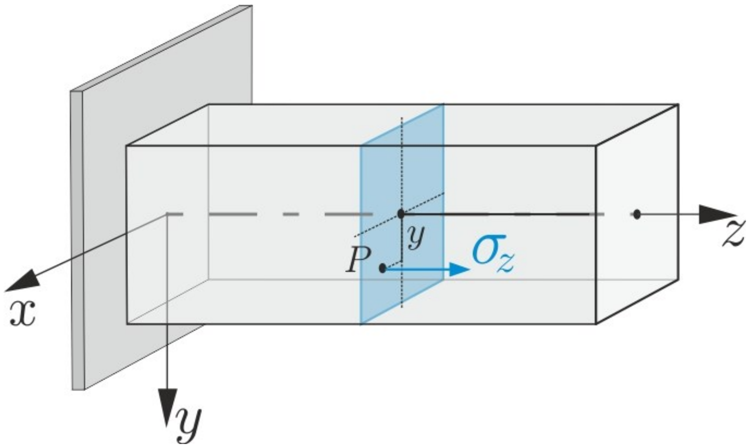
Soluzione in forma chiusa

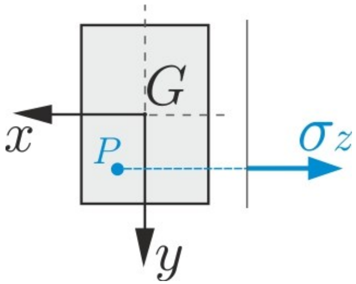
Tensioni

$$\boxed{\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y} \qquad \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0 \qquad T(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M_x}{I_x} y \end{bmatrix}$$

Formula di Navier

Rappresentazione grafica





2. Flessione retta M_x

L'asse neutro è perpendicolare all'asse di sollecitazione

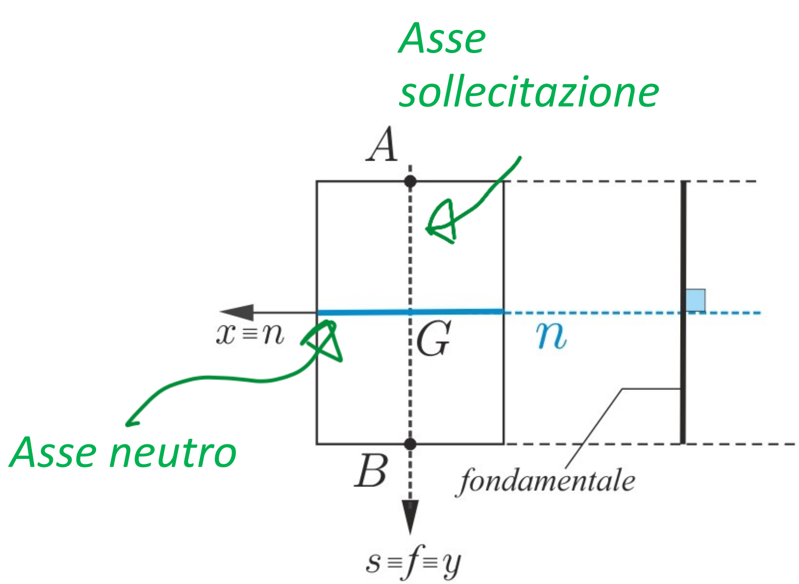
Stato tensionale

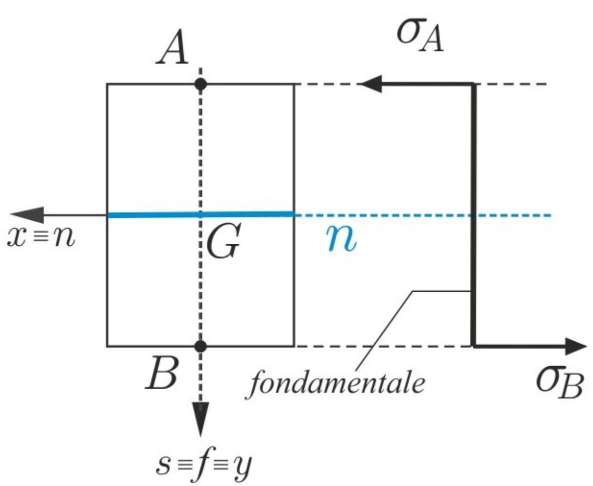
Formula di Navier

$$\boxed{\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y}$$

Asse neutro

$$\sigma_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 0}$$





$A \equiv \left(0, -\frac{h}{2}\right) \qquad B \equiv \left(0, +\frac{h}{2}\right)$

$\sigma_A = -\frac{M_x}{I_x}\frac{h}{2} \qquad \sigma_B = +\frac{M_x}{I_x}\frac{h}{2}$

2. Flessione retta M_x

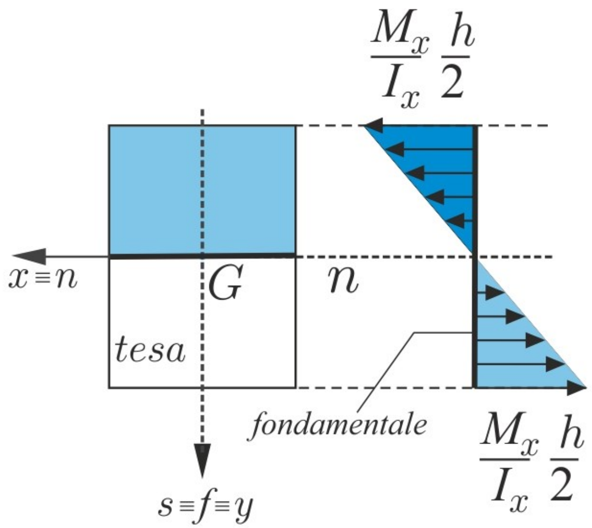
Stato tensionale

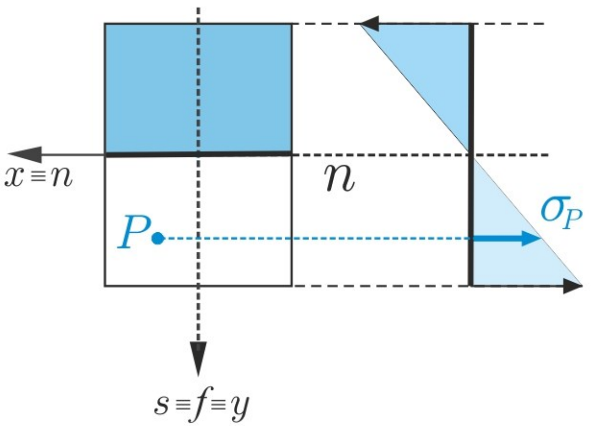
Formula di Navier

$$\boxed{\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y}$$

Asse neutro

$$\sigma_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 0}$$





2. Flessione retta M_x

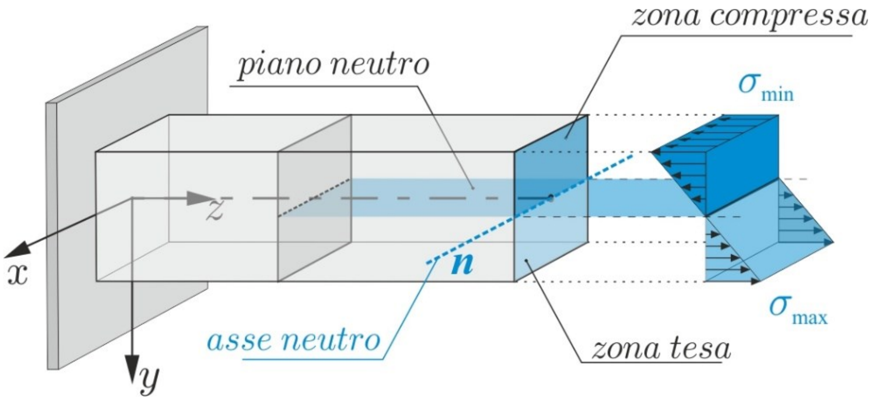
Stato tensionale

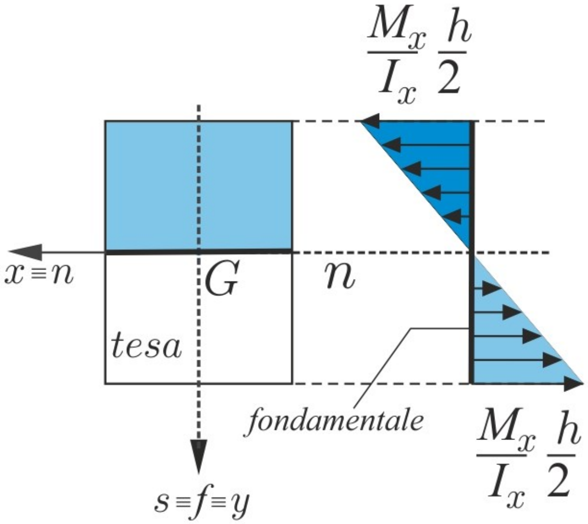
Formula di Navier

$$\boxed{\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y}$$

Asse neutro

$$\sigma_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 0}$$





2. Flessione retta M_y

L'asse neutro è perpendicolare all'asse di sollecitazione

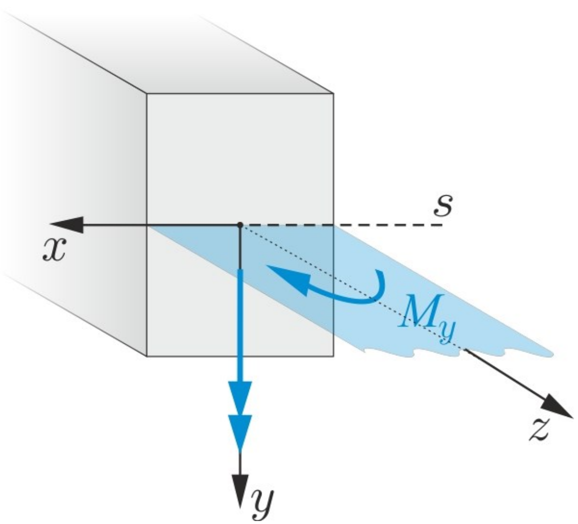
Stato tensionale

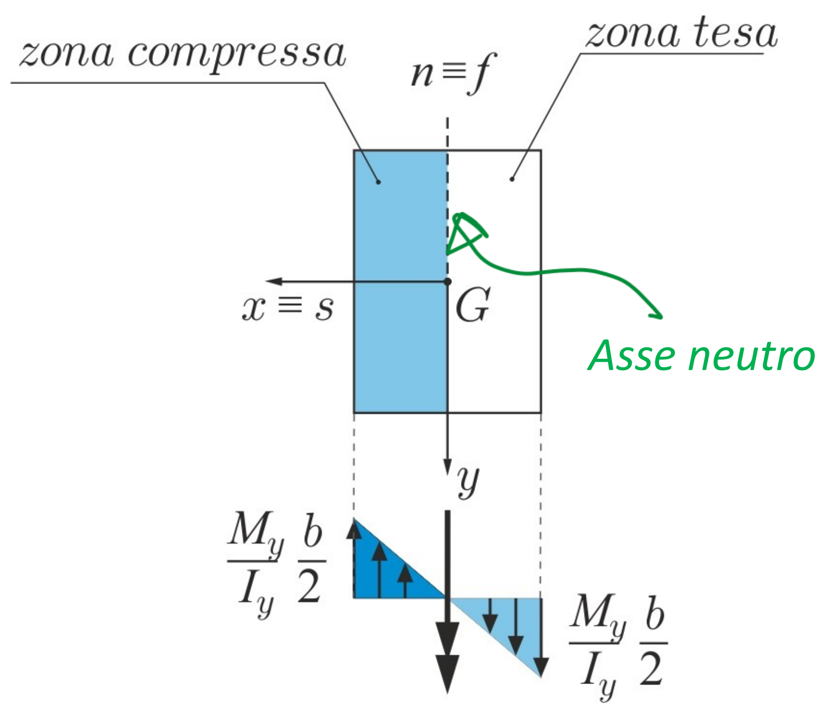
Formula di Navier

$$\boxed{\sigma_z = -\frac{M_y}{I_y} x}$$

Asse neutro

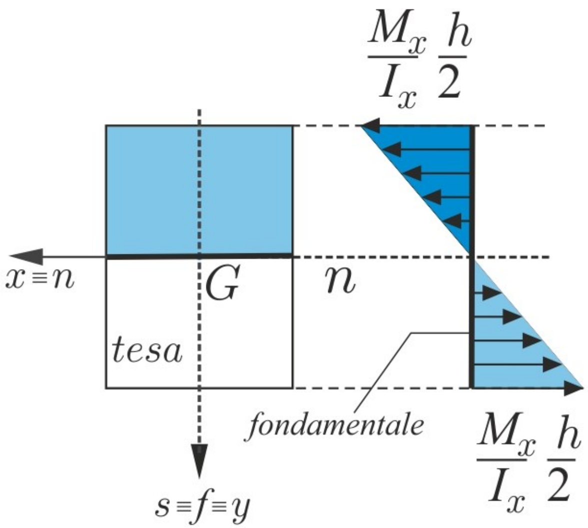
$$\sigma_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 0}$$





2. Flessione retta: Moduli di resistenza della sezione

Flessione retta M_x



$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{I_x}\frac{h}{2} = \frac{M_x}{\left(\frac{2I_x}{h}\right)} = \frac{M_x}{W_x}$$

$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x}}$$

$$W_x = \frac{2I_x}{h}$$

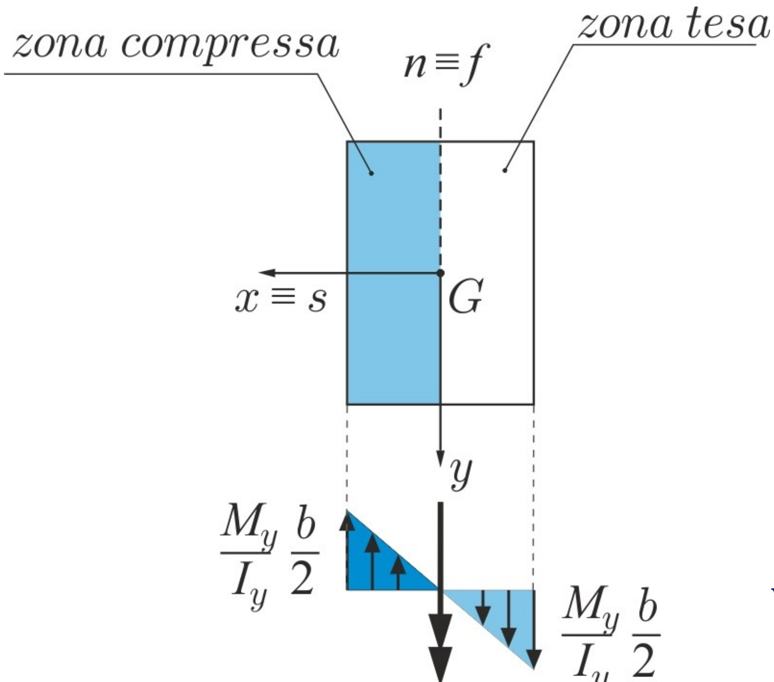
modulo di resistenza della sezione nel piano zy $[L^3]$

Sezione rettangolare

$$W_x = \frac{1}{6}bh^2$$

2. Flessione retta: Moduli di resistenza della sezione

Flessione retta M_y



$$\sigma_{max} = \frac{M_y}{I_y}\frac{b}{2} = \frac{M_y}{\left(\frac{2I_y}{b}\right)} = \frac{M_y}{W_y}$$

$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{M_y}{W_y}}$$

$$W_y = \frac{2I_y}{b}$$

modulo di resistenza della sezione nel piano zx $[L^3]$

Sezione rettangolare

$$W_y = \frac{1}{6}hb^2$$