Facoltà di Architettura
Architettura C.U.

Meccanica delle Strutture

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/statica

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

2.1 Parole chiave

Analisi strutturale: analisi e caratterizzazione della *risposta strutturale* cioè del comportamento meccanico manifestato dalla struttura in risposta alle azioni esterne.

Azioni Esterne → **Struttura** → **Risposta Strutturale**

- forze esterne,
- variazioni termiche,
- cedimenti vincolari,

etc.

- geometria,
- materiali costitutivi,
- condizioni di vincolo,

etc.

<u>INCOGNITE</u>

- spostamenti, deformazioni
- forze interne, tensioni

Parte I - Il modello di corpo rigido

- Definizioni, notazioni, limiti del modello
- Sistemi di corpi rigidi
- Cinematica del corpo rigido
- Statica del corpo rigido

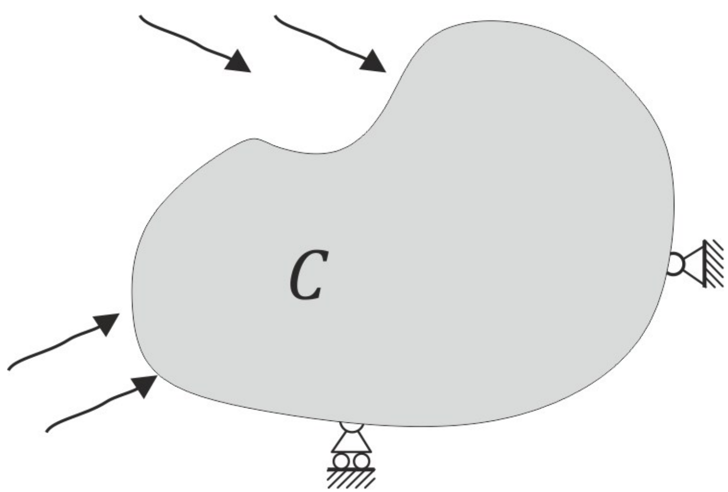
Parte I - Il modello di corpo rigido
2. Statica del corpo rigido

- **Obiettivi**
- **Modello delle forze esterne**
  - forza concentrata, momento di una forza
  - sistemi di forze
  - forze distribuite
- **I vincoli: prestazioni statiche**
- **Equazioni cardinali della statica**
- **Il problema statico**
- **Classificazione statica**
- **Esercizi** (sito: E05-E07, testo: §3.6-3.8)

2. Statica del corpo rigido: obiettivi

Obiettivo 1. Assegnato un sistema di corpi rigidi vincolato, definire il modello atto a caratterizzare le **forze esterne** agenti. Le forze esterne agenti sui corpi si suddividono in due classi: *forze esterne attive* e *forze esterne reattive* o vincolari. Le forze reattive, generalmente incognite a priori, sono quelle erogate dai vincoli in risposta alle forze attive

Obiettivo 2. Definire le condizioni analitiche che devono rispettare le forze esterne (attive e reattive) affinché la configurazione occupata dal sistema sia d'**equilibrio**.



Una configurazione C si dice di *equilibrio* per un sistema se, ponendo il sistema in C con atto di moto nullo, il sistema vi permane in *quiete*

Γ^a : *forze esterne attive*

Γ^v : *forze esterne reattive*

Grandezza fisica 'Forza'

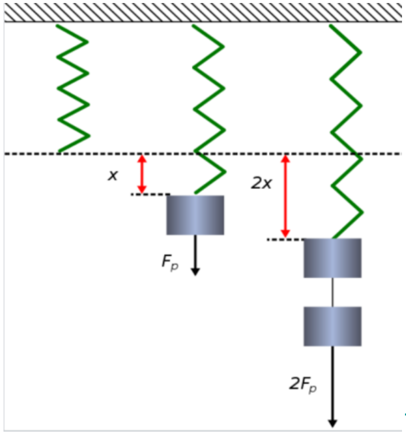
Definizione. Una **forza** è una grandezza fisica vettoriale e si manifesta nell'interazione reciproca di due o più corpi. Quantifica il fenomeno di induzione di una variazione dello stato di quiete o di moto dei corpi stessi. Le forze applicate ad un dato corpo possono avere due diversi tipi di effetti:

Effetti dinamici. Assegnato un corpo di massa m non vincolato in quiete (o in moto rettilineo uniforme), *le forze sono la causa dei possibili cambiamenti dello stato di quiete o di moto di tale corpo* (variazione del vettore velocità nel tempo):

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}}$$

Seconda legge di Newton

Effetti statici. Assegnato un corpo deformabile vincolato e in quiete *le forze sono la causa dei possibili cambiamenti di forma di tale corpo* (deformazioni):



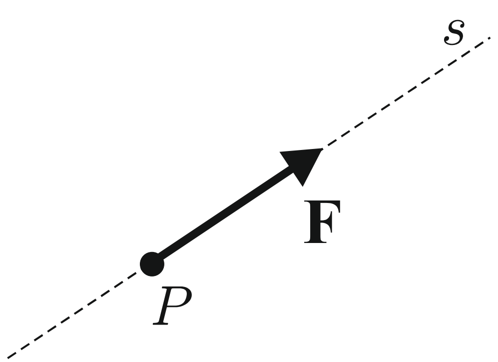
2. Statica del corpo rigido: richiami

Grandezza fisica 'Forza'

Unità di misura. L'unità di misura della forza nel S.I. è il Newton (*N*), definito come:

$$1\ N = 1\ \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

Tenendo conto del secondo principio della dinamica, possiamo quindi affermare che una forza di 1 *N* imprime ad un corpo con la massa di 1 *kg* l'accelerazione di 1 m/s^2.



s: retta d'azione
P: punto di applicazione
$|\mathbf{F}|, F$: modulo o intensità $[F]$

Dimensioni fisiche $[F]$, unità di misura N

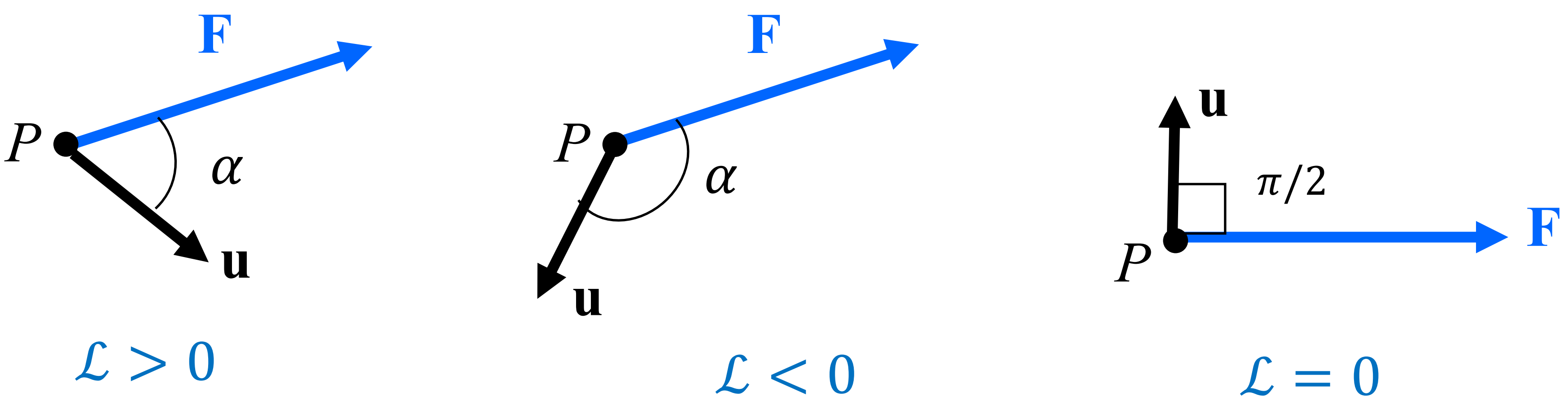
2. Statica del corpo rigido: richiami

Grandezza fisica 'Lavoro'

Definizione. Si consideri una forza **F** applicata in un punto P; se il punto P compie uno spostamento **u**, si definisce ***lavoro*** della forza **F** sullo spostamento **u** il prodotto scalare dei due vettori **F** e **u**

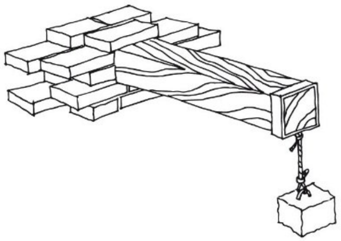
$$\boxed{\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}} \qquad \mathcal{L} = |\mathbf{F}||\mathbf{u}|\cos(\alpha)$$

- grandezza fisica scalare avente le dimensioni fisiche: $[\mathcal{L}] = [FL]$;
- il lavoro è positivo se l'angolo convesso α è acuto, negativo se è ottuso;
- il lavoro è nullo se **F** e **u** sono perpendicolari o se uno dei due vettori è nullo;
- se **F** e **u** sono paralleli, il lavoro è dato dal prodotto dei moduli dei due vettori moltiplicato per +1 o per -1 a seconda che i vettori siano concordi o discordi.

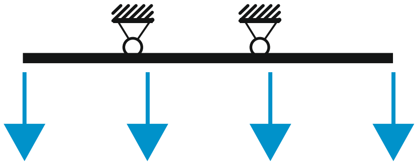


2. Statica del corpo rigido: forze esterne

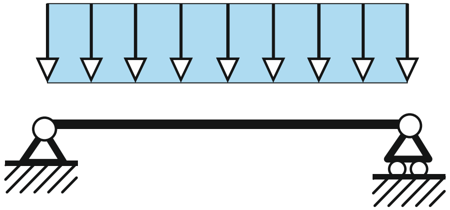
Forze concentrate



Sistemi di forze



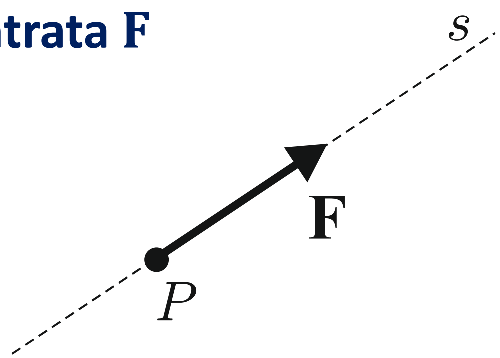
Densità di forza, forze distribuite



2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Forza concentrata F

$(P, \mathbf{F})$

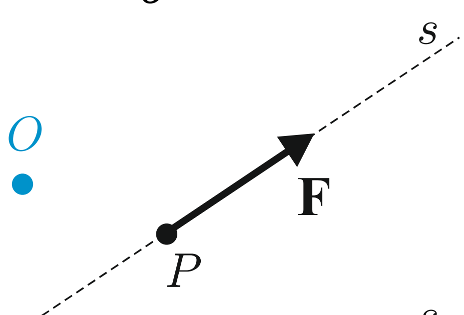


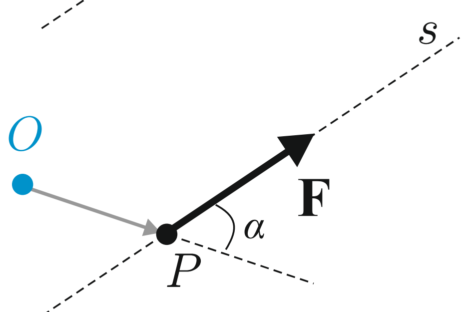
s: retta d'azione
P: punto di applicazione
$|\mathbf{F}|, F$: modulo o intensità $[F]$

Dimensioni fisiche $[F]$, unità di misura N

Momento di una forza rispetto ad un polo O, $\mathbf{M}_O$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{F}$$

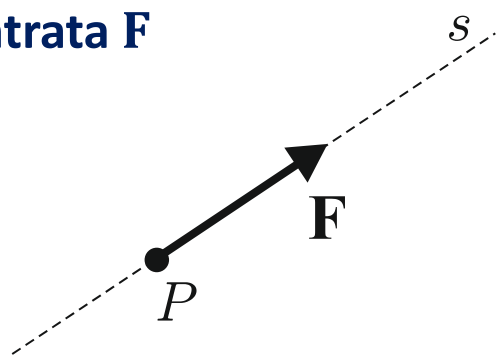




2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Forza concentrata $\mathbf{F}$

$(\boldsymbol{P}, \mathbf{F})$



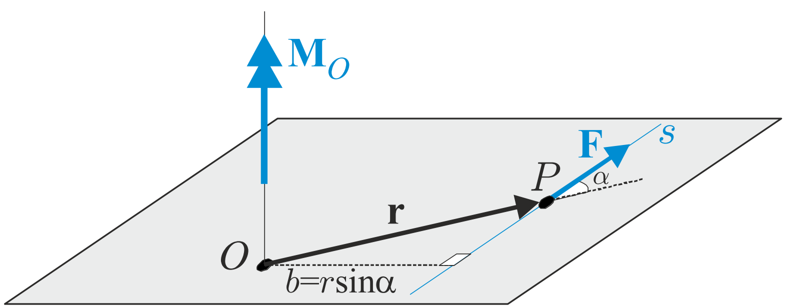
s: retta d'azione
P: punto di applicazione
$|\mathbf{F}|, F$: modulo o intensità $[F]$

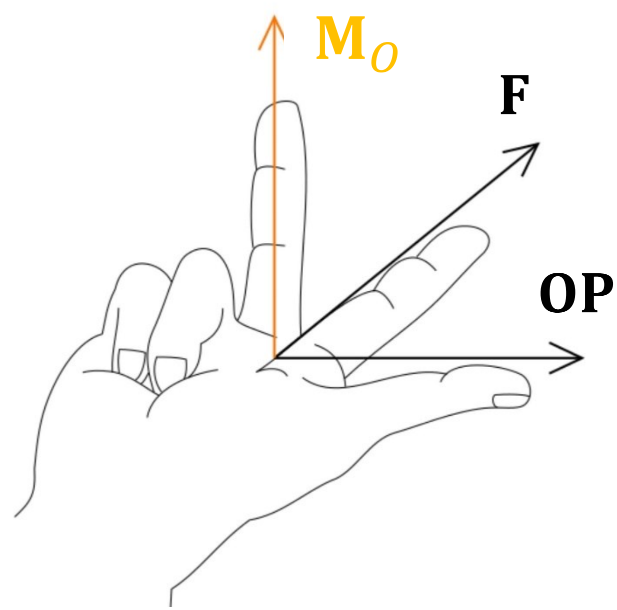
Dimensioni fisiche $[F]$, unità di misura N

Momento di una forza rispetto ad un polo $\boldsymbol{O}$, $\mathbf{M}_{\boldsymbol{O}}$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{F}$$

direzione: perpendicolare al piano $(\mathbf{F}, \mathbf{OP})$
verso: regola della mano destra

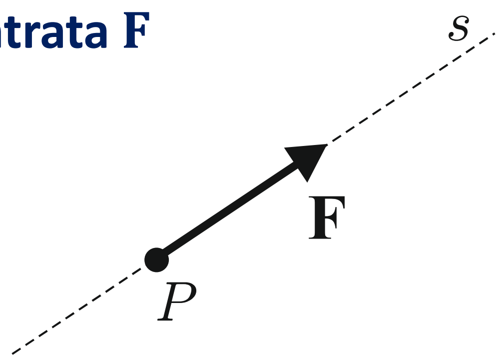




2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Forza concentrata F

$(\boldsymbol{P}, \mathbf{F})$



s: retta d'azione
P: punto di applicazione
$|\mathbf{F}|, F$: modulo o intensità $[F]$

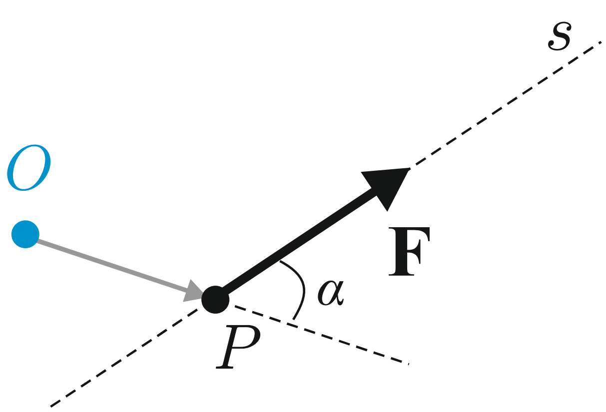
Dimensioni fisiche $[F]$, unità di misura N

Momento di una forza rispetto ad un polo $\boldsymbol{O}$, $\mathbf{M}_{\boldsymbol{O}}$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{F}$$

modulo o intensità: $|\mathbf{M}_{\boldsymbol{O}}|, M_O \quad [Fl]$

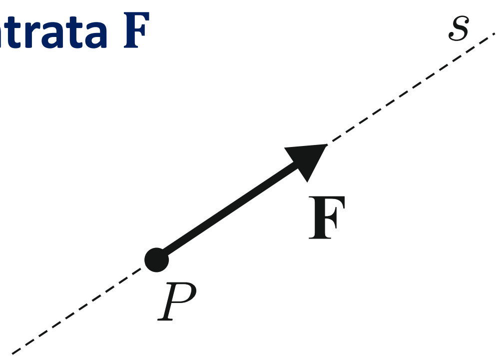
$$|\mathbf{M}_{\boldsymbol{O}}| = |\mathbf{F}||\mathbf{OP}|\sin(\alpha)$$



2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Forza concentrata F

$(\boldsymbol{P}, \mathbf{F})$



s: retta d'azione
P: punto di applicazione
$|\mathbf{F}|, F$: modulo o intensità $[F]$

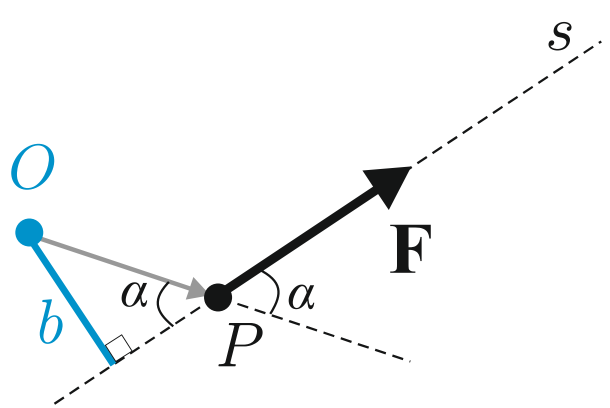
Dimensioni fisiche $[F]$, unità di misura N

Momento di una forza rispetto ad un polo $\boldsymbol{O}$, $\mathbf{M}_{\boldsymbol{O}}$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{F}$$

modulo o intensità: $|\mathbf{M}_{\boldsymbol{O}}|, M_O \quad [Fl]$

$$|\mathbf{M}_{\boldsymbol{O}}| = |\mathbf{F}||\mathbf{OP}|\sin(\alpha) = Fb$$

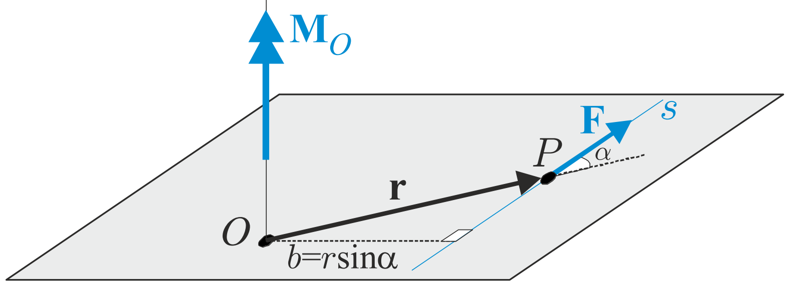


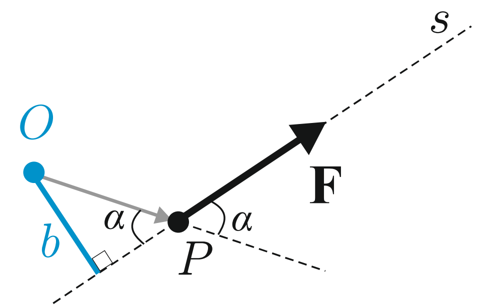
*Braccio: distanza fra la retta d'azione di **F** e il polo O*

$$b = |\mathbf{OP}|\sin(\alpha)$$

Dimensioni fisiche $[Fl]$, unità di misura Nm

Momento di una forza

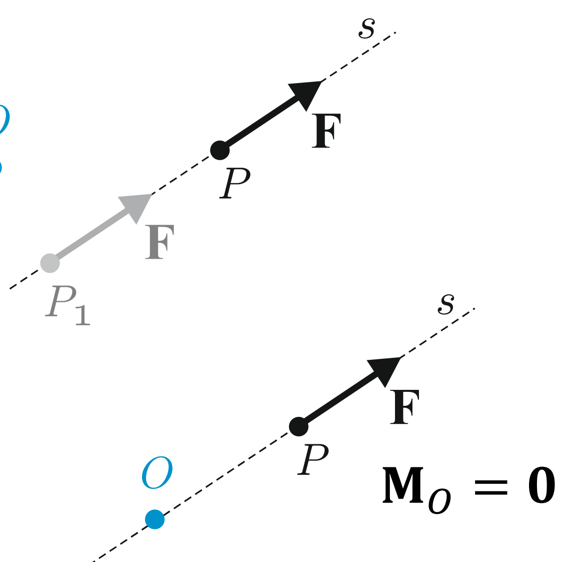




$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{F}$$

$$|\mathbf{M}_O| = |\mathbf{F}||\mathbf{OP}|\sin(\alpha) = Fb$$

$$m = \pm Fb$$



Osservazioni

Osservazione 1:

Se il punto di applicazione P si sposta sulla retta d'azione s, il momento della forza $\mathbf{F}$ *rispetto al polo O non cambia*

Osservazione 2:

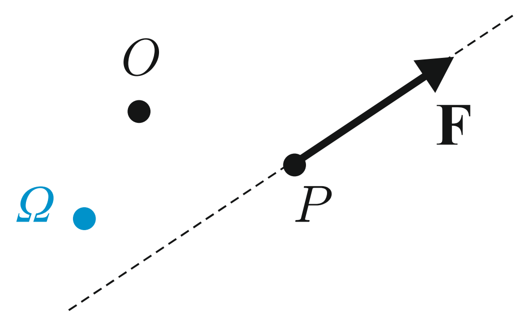
Se la retta d'azione r della forza passa per il polo O il ***momento rispetto al polo O è nullo***

2. Statica del corpo rigido: Braccio

2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Momento di una forza: cambiamento del polo

Si assuma un polo Ω distinto da O :
che relazione c'è fra $\mathbf{M}_\Omega$ *e* $\mathbf{M}_O$ *?*

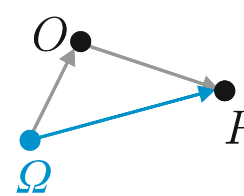


$$\mathbf{M}_\Omega = \mathbf{\Omega P} \times \mathbf{F} \qquad \mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{F}$$

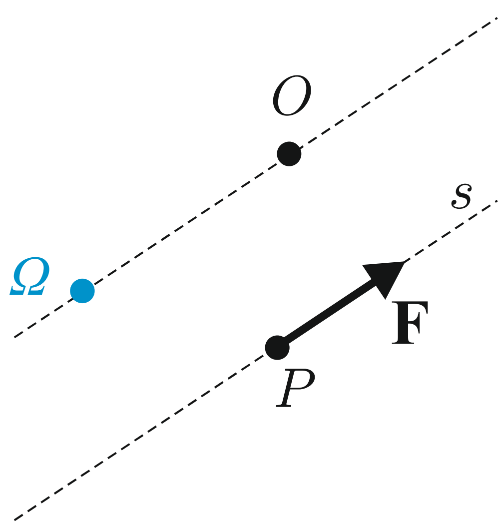
$$\mathbf{M}_\Omega = (\mathbf{\Omega O} + \mathbf{OP}) \times \mathbf{F} = \mathbf{\Omega O} \times \mathbf{F} + \mathbf{OP} \times \mathbf{F}$$

$$\boxed{\mathbf{M}_\Omega = \mathbf{M}_O + \mathbf{\Omega O} \times \mathbf{F}}$$

Formula di trasporto del momento



$$\mathbf{\Omega P} = \mathbf{\Omega O} + \boldsymbol{O}\mathbf{P}$$



Osservazione 3:
Se $\mathbf{\Omega O} // \mathbf{F}$ *(cioè se Ω si trova in una retta parallela alla forza e passante per O) allora* $\mathbf{\Omega P} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ *e* $\mathbf{M}_\Omega = \mathbf{M}_O$*. I momenti di una forza rispetto a punti che si trovano su una retta parallela alla sua direzione sono uguali*

2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Sistema di forze Γ: definizioni

$$\Gamma: (P_i, \mathbf{F}_i), i = 1, \dots, N$$

***Risultante* $\mathbf{R}$**

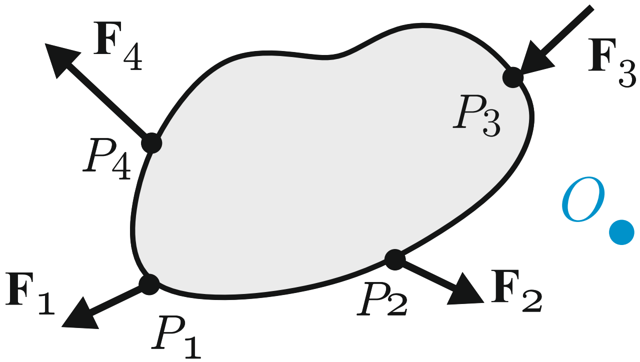
$|\mathbf{R}|$, R: *modulo o intensità.* *Dimensioni fisiche* $[F]$, *unità di misura N*

$$\mathbf{R} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \cdots + \mathbf{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i$$

***Momento risultante* $\mathbf{M}_O$**

$|\mathbf{M}_O|$ *: modulo o intensità.* *Dimensioni fisiche* $[FL]$, *unità di misura Nm*

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP_1} \times \mathbf{F_1} + \cdots + \mathbf{OP}_N \times \mathbf{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{OP}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{M}_{Oi}$$



2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Momento risultante di un sistema: cambiamento del polo

Si assuma un polo Ω distinto da O : che relazione c'è fra $\mathbf{M}_\Omega$ *e* $\mathbf{M}_O$ *?*

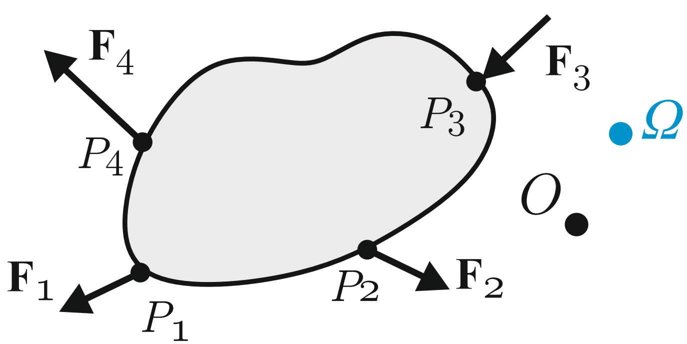
$$\mathbf{M}_\Omega = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{M}_{\Omega i} \qquad \mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{M}_{Oi} \qquad \mathbf{M}_{\Omega i} = \mathbf{M}_{Oi} + \mathbf{\Omega O} \times \mathbf{F}_i$$

(Formula di trasporto del momento)

$$\mathbf{M}_\Omega = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{M}_{\Omega i} = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{M}_{Oi} + \mathbf{\Omega O} \times \mathbf{F}_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{M}_{Oi}}_{\mathbf{M}_O} + \mathbf{\Omega O} \times \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i}_{\mathbf{R}}$$

$$\boxed{\mathbf{M}_\Omega = \mathbf{M}_O + \mathbf{\Omega O} \times \mathbf{R}}$$

Formula di trasporto del momento risultante



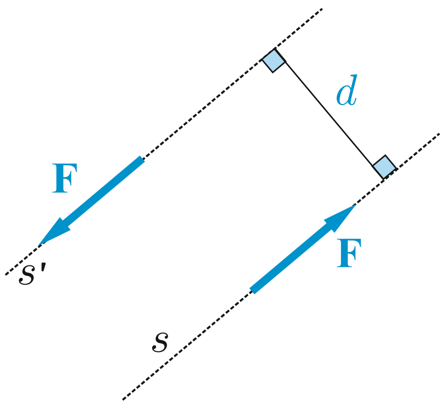
Osservazione

Se $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ *(cioè nei sistemi a risultante nulla) allora* $\mathbf{M}_\Omega = \mathbf{M}_O$ *comunque si scelgano Ω e O: nei sistemi a risultante nulla il momento risultante non dipende dal polo scelto*

2. Statica del corpo rigido: forze esterne

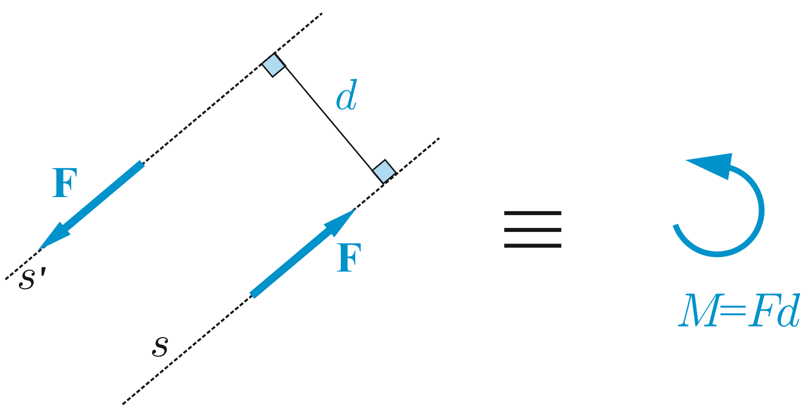
Sistemi a risultante nulla: coppia di forze

Si definisce coppia di forze un sistema costituito da due forze ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$) che hanno: stessa direzione, stesso modulo, versi opposti; risulta quindi: $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$.
Per l'osservazione precedente: il momento risultante di una coppia di forze non dipende dal polo scelto.

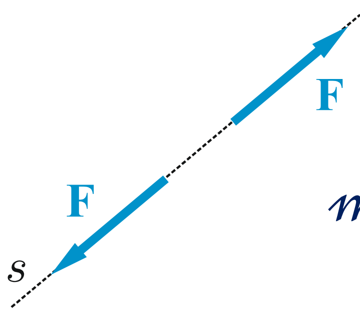


Sistemi a risultante nulla: coppia di forze

Si definisce coppia di forze un sistema costituito da due forze ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$) che hanno: stessa direzione, stesso modulo, versi opposti; risulta quindi: $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$.
Per l'osservazione precedente: il momento risultante di una coppia di forze non dipende dal polo scelto.



$$m = M_O = Fd$$



$$m = 0$$

$$m = +Fd$$

$$m = -Fd$$

2. Statica del corpo rigido: forze esterne

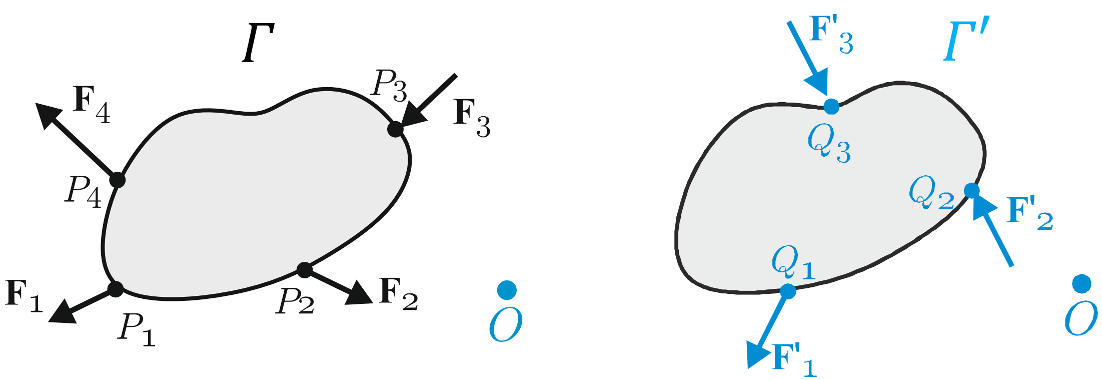
Sistemi staticamente equivalenti

Due sistemi distinti di forze, Γ *e* Γ', *si dicono staticamente equivalenti se hanno lo stesso risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo O scelto arbitrariamente*

$$\Gamma: (P_i, \mathbf{F}_i), i = 1, \dots, N \qquad \Gamma': (Q_j, \mathbf{F'}_j), j = 1, \dots, M$$

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \qquad \mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{OP}_i \times \mathbf{F}_i \qquad \mathbf{R}' = \sum_{j=1}^{M} \mathbf{F'}_j \qquad \mathbf{M'}_O = \sum_{j=1}^{M} \mathbf{OQ}_j \times \mathbf{F'}_j$$

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{R}' \\ \mathbf{M}_O = \mathbf{M'}_O \end{cases}}$$



Proprietà

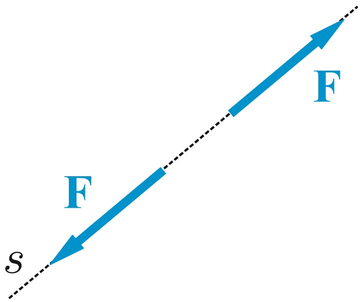
Due sistemi staticamente equivalenti hanno sempre lo stesso momento risultante rispetto ad un qualsiasi polo comunque scelto

Sistemi nulli o equivalenti a 0

Un sistema di forze si dice nullo o equivalente a 0 se ha nulli risultante e momento risultante rispetto ad un polo O scelto arbitrariamente

$$\Gamma_{\#}: (P_i, \mathbf{F}_i), i = 1, \dots, N$$

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \end{cases}}$$



Proprietà

Il momento risultante di un sistema equivalente a 0 è sempre nullo, comunque si scelga il polo.

2. Statica del corpo rigido: forze esterne

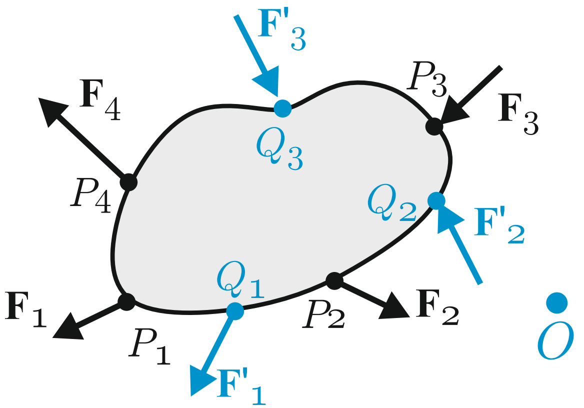
Sistemi staticamente equilibrati

Due sistemi distinti di forze, Γ e Γ', si dicono staticamente equilibrati se hanno uguali e opposti risultante e momento risultante rispetto ad un polo O scelto arbitrariamente

$$\Gamma: (P_i, \mathbf{F}_i), i = 1, \dots, N \qquad \Gamma': (Q_j, \mathbf{F'}_j), j = 1, \dots, M$$

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \qquad \mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{OP}_i \times \mathbf{F}_i \qquad \mathbf{R}' = \sum_{j=1}^{M} \mathbf{F'}_j \qquad \mathbf{M'}_O = \sum_{j=1}^{M} \mathbf{OQ}_j \times \mathbf{F'}_j$$

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{R} = -\mathbf{R}' \\ \mathbf{M}_O = -\mathbf{M'}_O \end{cases}} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} \mathbf{R} + \mathbf{R}' = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O + \mathbf{M'}_O = \mathbf{0} \end{cases}}$$



Proprietà

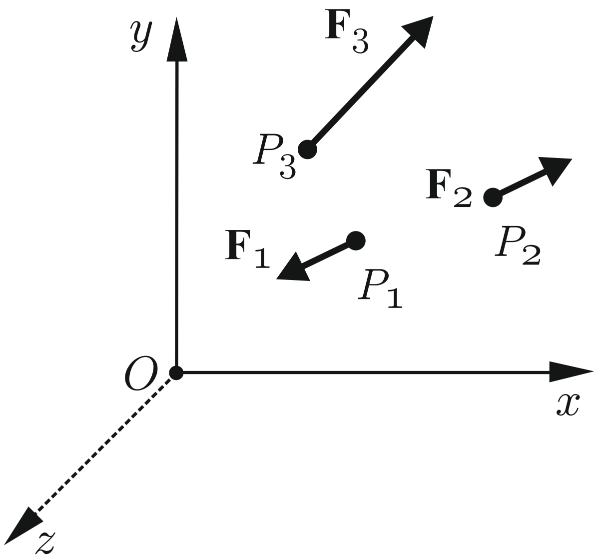
Se Γ e Γ' sono due sistemi equilibrati, allora il sistema $\Gamma \cup \Gamma'$ è un sistema nullo

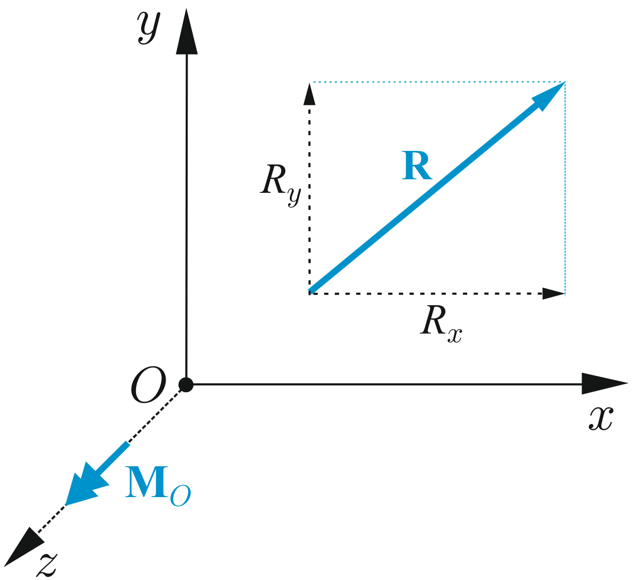
Sistemi piani di forze

Un sistema di forze si dice piano se tutti i vettori forza sono paralleli ad uno stesso piano π. Rispetto ad un polo O scelto sul piano π, i vettori momento delle forze sono tutti paralleli e perpendicolari a π.

Componenti cartesiane

Scelto un sistema cartesiano in cui il piano coordinato xy coincide con π, si ha per il risultante e il vettore risultante





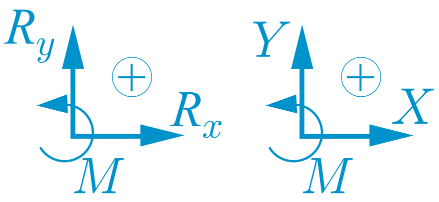
$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j}$$

$$\mathbf{M}_O = M_O\mathbf{k}$$

Coppia di forze nel piano

$$\mathbf{M} = m\mathbf{k}$$

Convenzioni



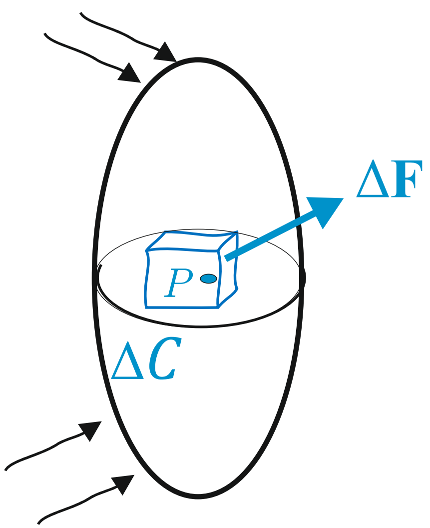
2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Densità di forza

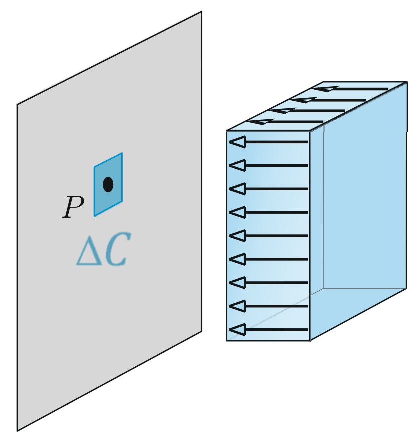
Spesso le forze esterne agiscono su una porzione finita del corpo o su ogni punto dell'intero corpo/sistema di corpi. Es: forza di gravità, pressione di un fluido su una parete etc. Per modellare questo tipo di azione si introduce il vettore densità di forza $\mathbf{b}(P)$

$$\mathbf{b}(P) = \lim_{\Delta C \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta C}$$

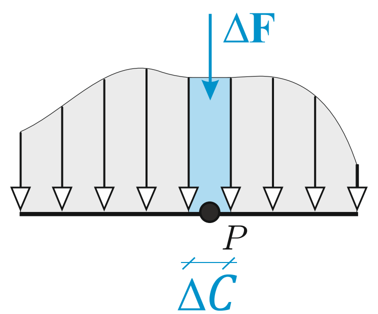
dove ΔC è un intorno (di volume, di superficie o di linea) finito del punto P, $\Delta \mathbf{F}$ è la risultante delle forze agenti su tale intorno.



$[b] = [FL^{-3}]$



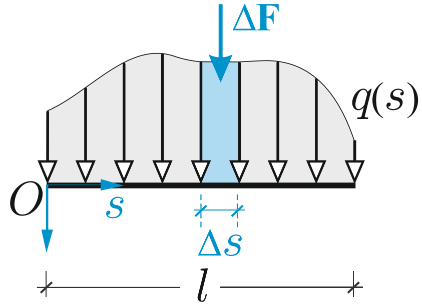
$[b] = [FL^{-2}]$



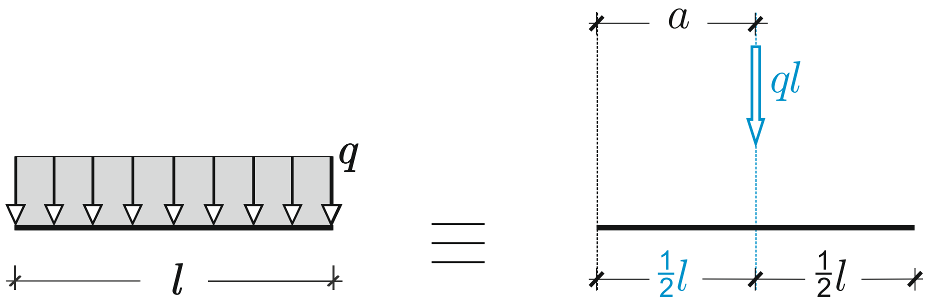
$[b] = [FL^{-1}]$

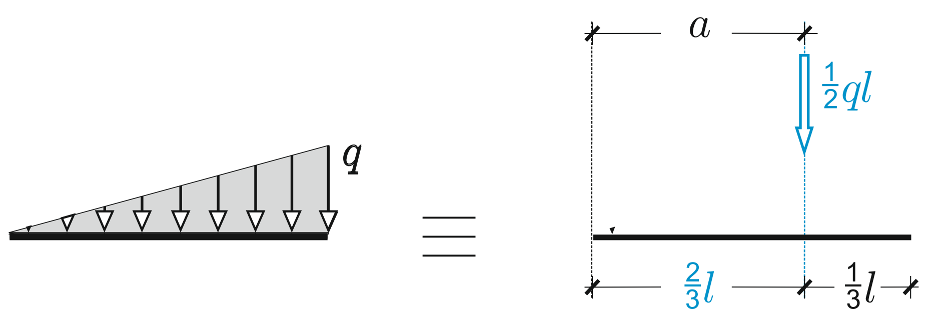
2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Densità di forza per unità di linea



$$\mathbf{b}(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta s}$$





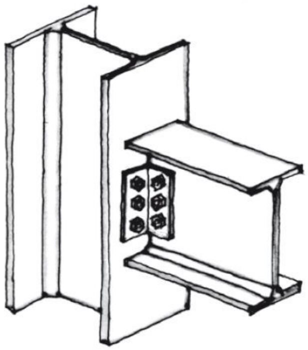
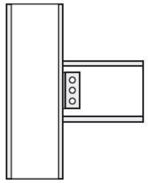
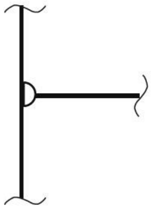
2. Statica del corpo rigido: i vincoli

Definizioni. Gli elementi strutturali devono essere collegati fra di loro e con gli elemnti fissi esterni alla struttura (*suolo*). I dispositivi di connessione che realizzano ciò sono detti *vincoli*. I vincoli che collegano gli elementi strutturali con il suolo sono detti **esterni**, i vincoli che collegano due elementi della stessa struttura sono detti **interni**.

Modello dei vincoli. I vincoli sono modellati assimilandoli a dispositivi ideali che presentano le seguenti caratteristiche: sono *puntiformi*, *lisci* (privi di attrito) e *bilaterali*. Si ammetterà inoltre valida *l'ipotesi dei piccoli spostamenti*.

Prestazioni statiche. Dal punto di vista statico i vincoli sono in grado di erogare delle forze e/o coppie di forze nei punti dei corpi cui sono applicati (Postulato di Kirchhoff); si tratta di forze esterne reattive chiamate anche **reazioni vincolari**.



1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

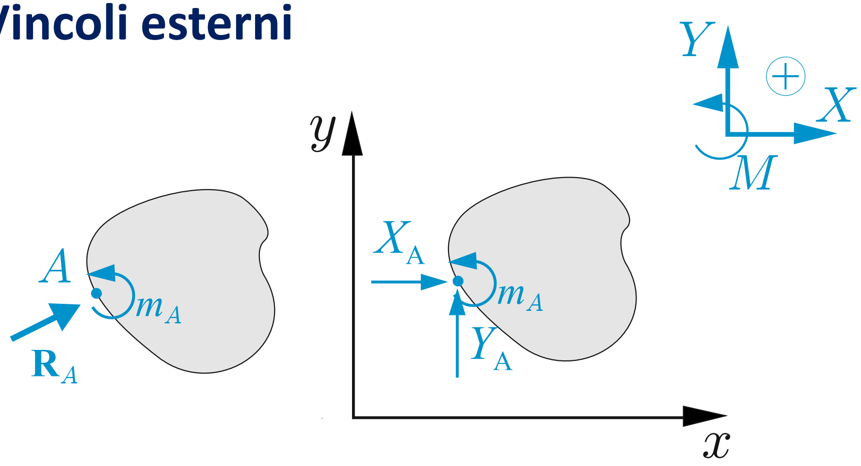
Molteplicità statica m. Analiticamente le prescrizioni statiche dei vincoli si traducono in forze concentrate e/o coppie: si definisce **molteplicità statica** del vincolo il numero m di componenti scalari indipendenti delle reazioni vincolari che il vincolo è in grado di erogare. Come si vedrà moltiplicità statica e cinematica m coincidono.

Tipologie ideali di vincolo. In base al tipo di prescrizioni statiche e alla molteplicità m si possono distinguere le stesse tipologie di vincolo (esterni o interni) viste in cinematica, ad esempio:

- Pendolo o biella, $m = 1$ (vincolo semplice)
- Carrello, $m = 1$ (vincolo semplice)
- Cerniera, $m = 2$ (vincolo doppio)
- Glifo o doppio pendolo, $m = 2$ (vincolo doppio)
- Incastro, $m = 3$ (vincolo triplo)

2. Statica del corpo rigido: i vincoli

Vincoli esterni



Un vincolo esterno applicato in un punto A del corpo può imporre una forza concentrata $\mathbf{R}_A$ nel punto A in cui è applicato e una coppia di forze $\mathbf{M}_A$

Nel piano:

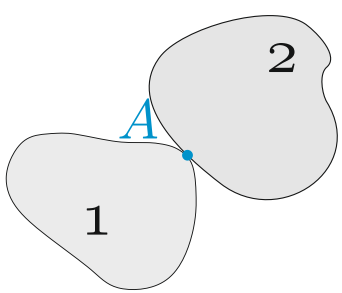
$$\mathbf{R}_A = X_A\mathbf{i} + Y_A\mathbf{j} \qquad \mathbf{M}_A = m_A\mathbf{k}$$

Reazioni vincolari scalari:

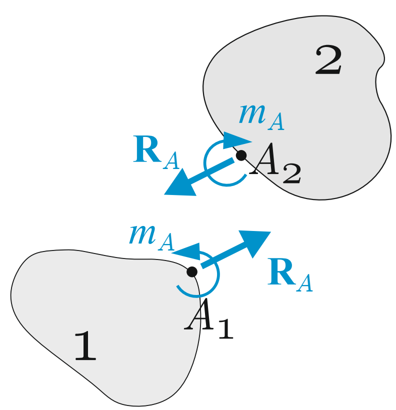
$$X_A, Y_A, m_A$$

(Il pedice A indica il punto in cui è applicato il vincolo)

Vincoli interni fra due corpi



$A \equiv A_1 \equiv A_2$

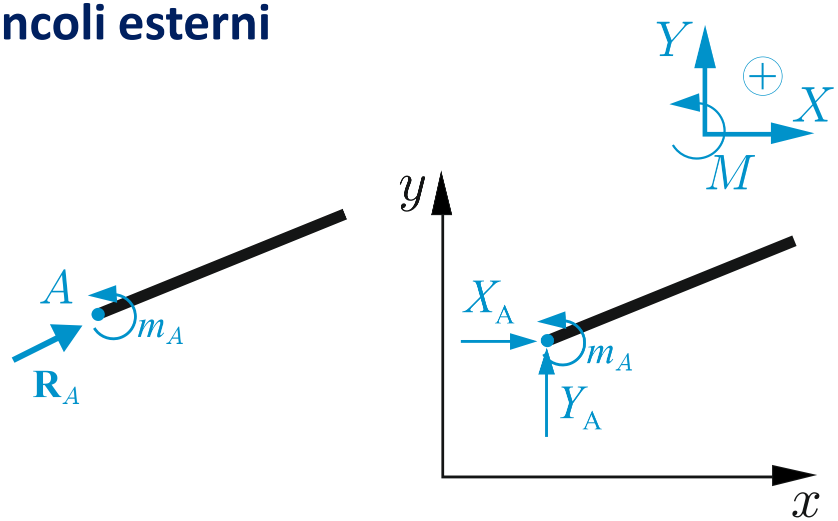


Un vincolo interno applicato in un punto $A \equiv A_1 \equiv A_2$ di due corpi può imporre forze e/o coppie in A_1 e forze e/o coppie uguali e opposte in A_2 (principio di azione e reazione)

Sapienza Università di Roma

2. Statica del corpo rigido: i vincoli

Vincoli esterni



Un vincolo esterno applicato in un punto A del corpo può imporre una forza concentrata $\mathbf{R}_A$ nel punto A in cui è applicato e una coppia di forze $\mathbf{M}_A$

Nel piano:

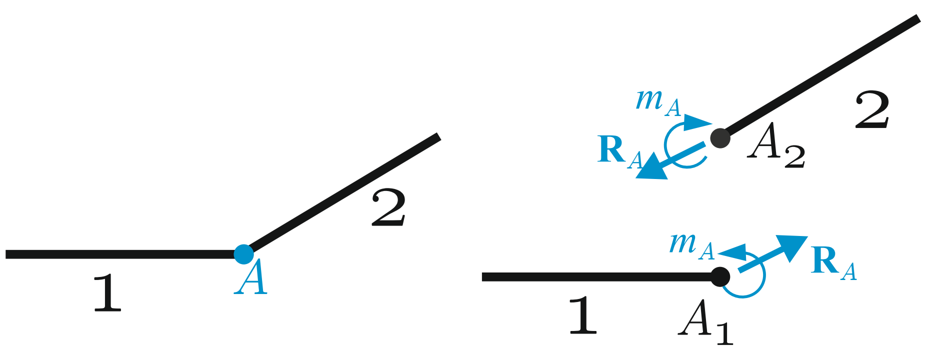
$$\mathbf{R}_A = X_A\mathbf{i} + Y_A\mathbf{j} \qquad \mathbf{M}_A = m_A\mathbf{k}$$

Reazioni vincolari scalari:

$$X_A, Y_A, m_A$$

(Il pedice A indica il punto in cui è applicato il vincolo)

Vincoli interni fra due corpi

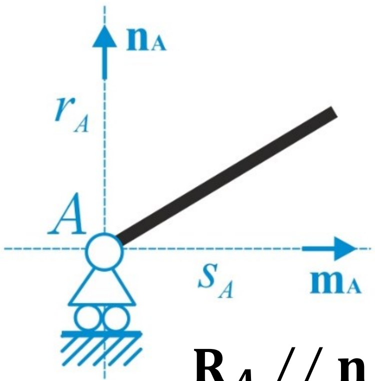


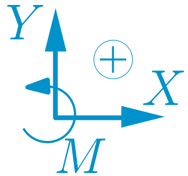
$A \equiv A_1 \equiv A_2$

Un vincolo interno applicato in un punto $A \equiv A_1 \equiv A_2$ di due corpi può imporre forze e/o coppie in A_1 e forze e/o coppie uguali e opposte in A_2 (principio di azione e reazione)

Carrello esterno

Può erogare in A una forza di modulo e verso qualsiasi, ma parallela all'asse r_A





$\mathbf{R}_A \,//\, \mathbf{n}_A$

$m_A = 0$

Reazioni vincolari *indipendenti*: 1

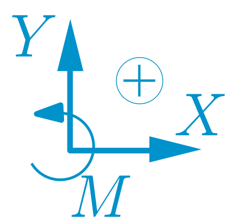
$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A \neq 0 \\ m_A = 0 \end{cases} \qquad m = 1$$

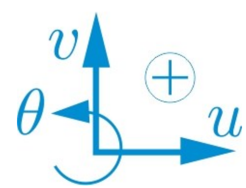
Prestazioni statiche

$$\begin{cases} u_A \neq 0 \\ v_A = 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases} \qquad m = 1$$

Prestazioni cinematiche

$$X_A\, u_A + Y_A\, v_A + m_A \theta = 0$$

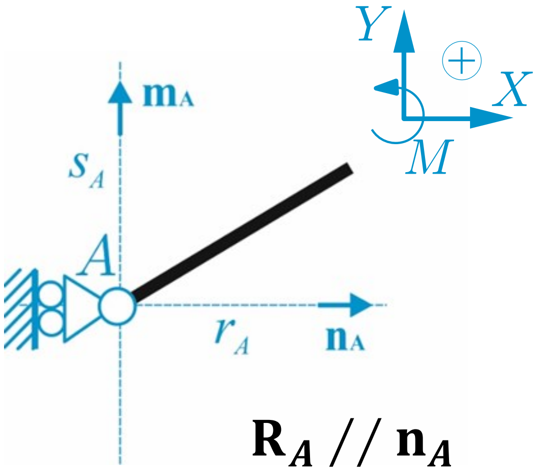




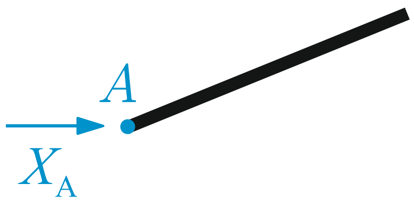
2. Statica del corpo rigido: i vincoli

Carrello esterno

Può erogare in A una forza di modulo e verso qualsiasi, ma parallela all'asse r_A



$$\mathbf{R}_A \, // \, \mathbf{n}_A$$
$$m_A = 0$$



$$\begin{cases} X_A \neq 0 \\ Y_A = 0 \\ m_A = 0 \end{cases} \qquad m = 1$$

Prestazioni statiche

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A \neq 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases} \qquad m = 1$$

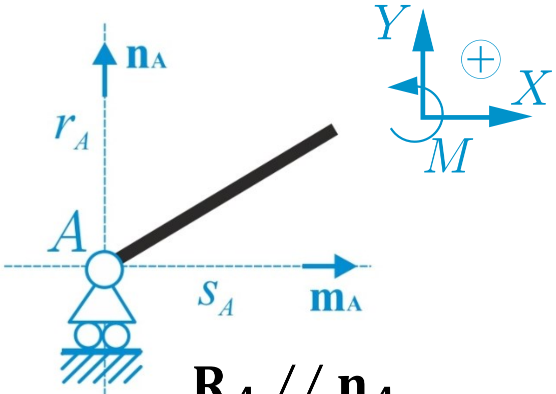
Prestazioni cinematiche

$$X_A \, u_A + Y_A \, v_A + m_A \theta = 0$$

2. Statica del corpo rigido: i vincoli

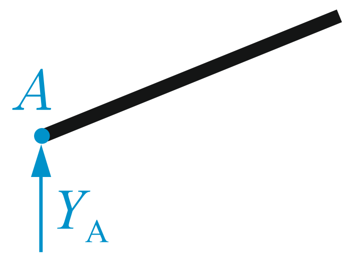
Carrello esterno

Può erogare in A una forza di modulo e verso qualsiasi, ma parallela all'asse r_A



$\mathbf{R}_A \,//\, \mathbf{n}_A$

$m_A = 0$



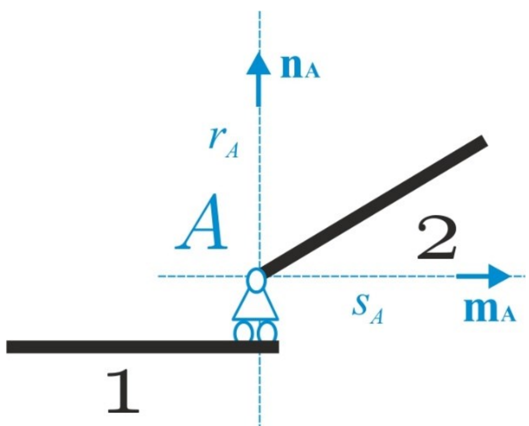
Reazioni vincolari *indipendenti*: 1

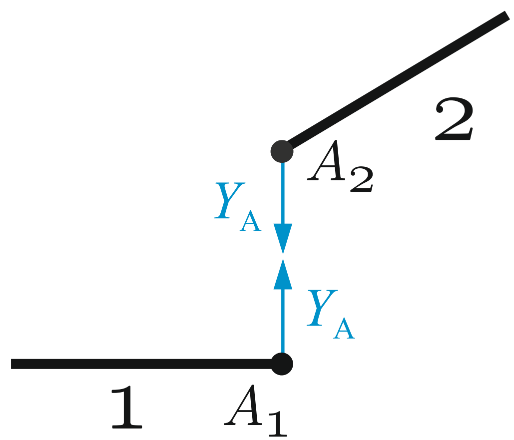
$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A \neq 0 \\ m_A = 0 \end{cases}$$

$$m = 1$$

Prestazioni statiche

Carrello interno





Reazioni vincolari *indipendenti*: 1

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A \neq 0 \\ m_A = 0 \end{cases}$$

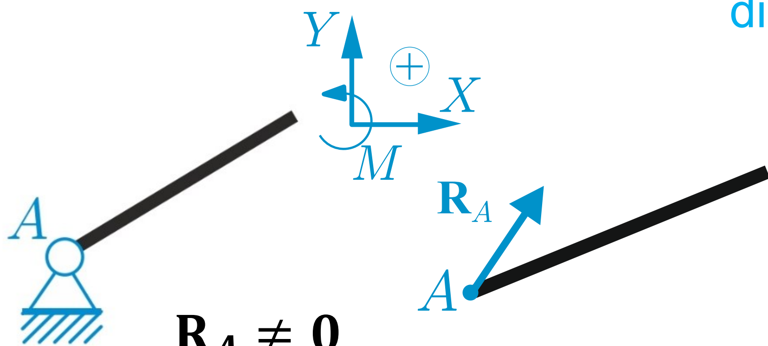
$$m = 1$$

Prestazioni statiche

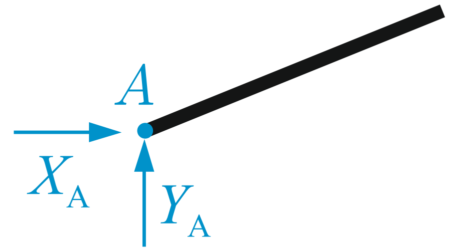
2. Statica del corpo rigido: i vincoli

Cerniera esterna

Può erogare in A una forza di modulo, verso e direzione **qualsiasi**



$$\mathbf{R}_A \neq \mathbf{0}$$
$$m_A = 0$$



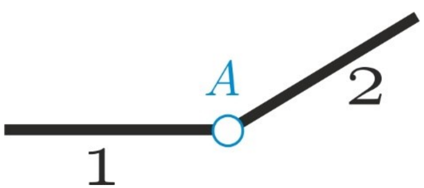
Reazioni vincolari *indipendenti*: 2

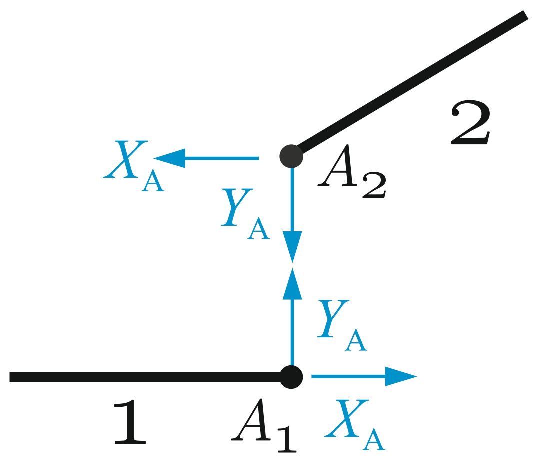
$$\begin{cases} X_A \neq 0 \\ Y_A \neq 0 \\ m_A = 0 \end{cases}$$

$$m = 2$$

Prestazioni statiche

Cerniera interna





Reazioni vincolari *indipendenti*: 2

$$\begin{cases} X_A \neq 0 \\ Y_A \neq 0 \\ m_A = 0 \end{cases}$$

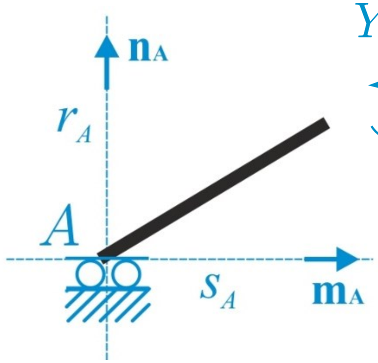
$$m = 2$$

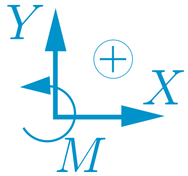
Prestazioni statiche

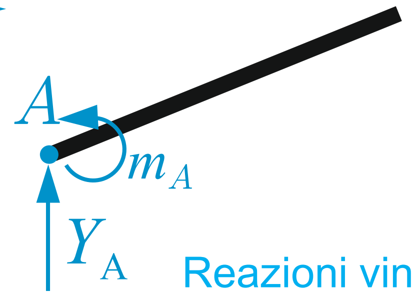
2. Statica del corpo rigido: i vincoli

Glifo o doppio pendolo esterno

Può erogare in A una coppia e una forza di modulo e verso qualsiasi, ma parallela all'asse r_A







$\mathbf{R}_A \, // \, \mathbf{n}_A$

$m_A \neq 0$

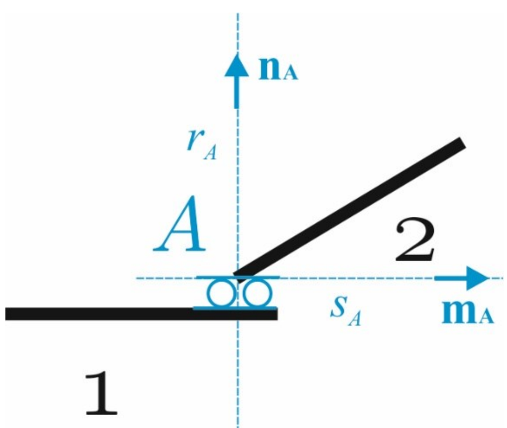
Reazioni vincolari *indipendenti*: 2

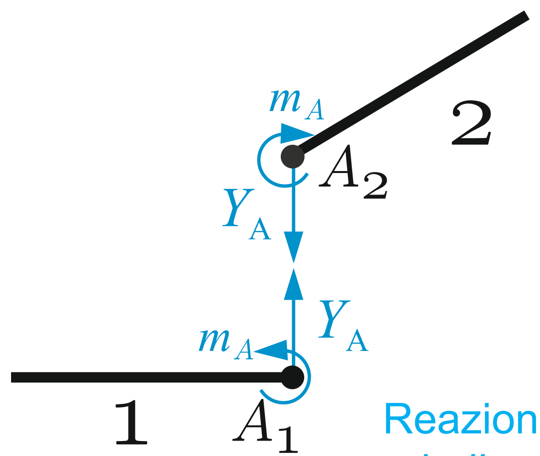
$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A \neq 0 \\ m_A \neq 0 \end{cases}$$

$$m = 2$$

Prestazioni statiche

Glifo o doppio pendolo interno





Reazioni vincolari *indipendenti*: 2

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A \neq 0 \\ m_A \neq 0 \end{cases}$$

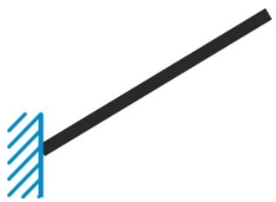
$$m = 2$$

Prestazioni statiche

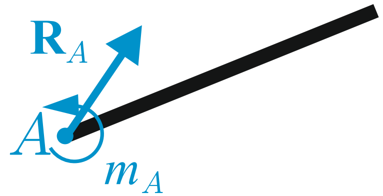
2. Statica del corpo rigido: i vincoli

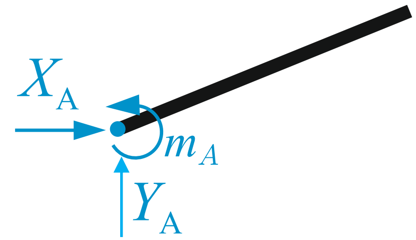
Incastro esterno

Può erogare in A una forza di modulo, verso e direzione **qualsiasi**



$$\mathbf{R}_A \neq \mathbf{0}$$
$$m_A \neq 0$$





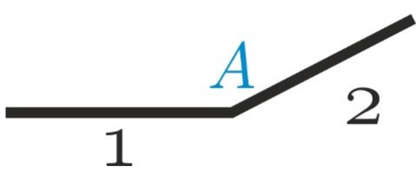
Reazioni vincolari *indipendenti*: 3

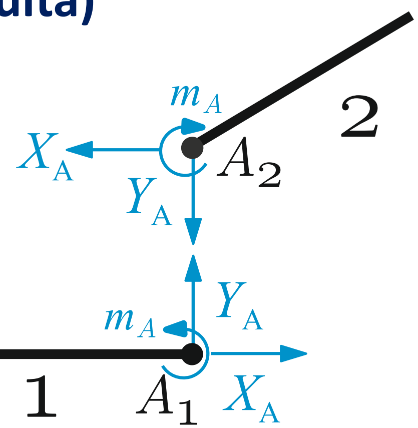
$$\begin{cases} X_A \neq 0 \\ Y_A \neq 0 \\ m_A \neq 0 \end{cases}$$

$$m = 3$$

Prestazioni statiche

Incastro interno (vincolo di continuità)





Reazioni vincolari *indipendenti*: 3

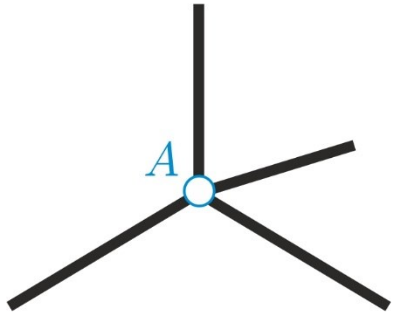
$$\begin{cases} X_A \neq 0 \\ Y_A \neq 0 \\ m_A \neq 0 \end{cases}$$

$$m = 3$$

Prestazioni statiche

2. Statica del corpo rigido: i vincoli

Vincoli interni che connettono più di due corpi



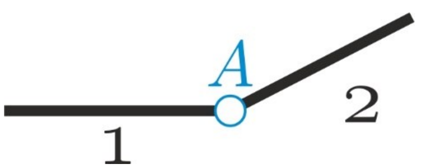
$m = 2(4\text{-}1) = 6$

Molteplicità

$m = n_V(n_C\text{-}1)$

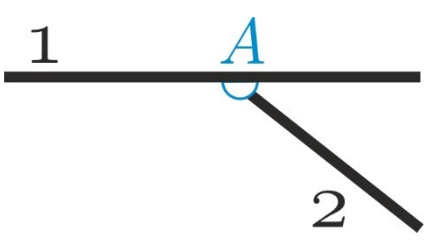
Rappresentazione grafica

$m = 2$



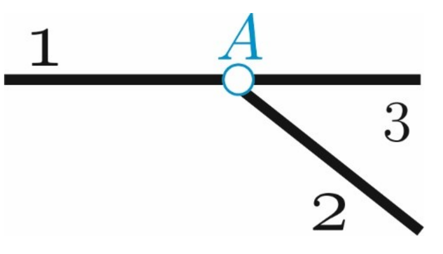
Cerniera che collega due travi alle estremità

$m = 2$



Cerniera che collega due travi non alle estremità

$m = 4$



Cerniera che collega tre travi alle estremità

2. Statica del corpo rigido: equazioni cardinali

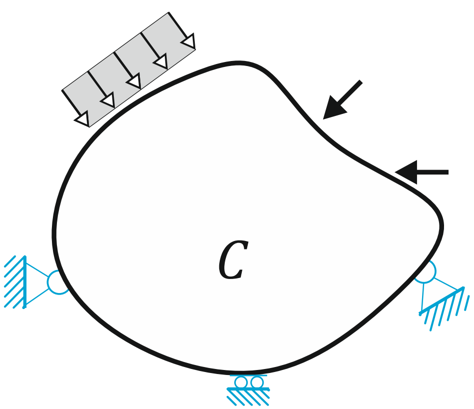
Equazioni cardinali della statica ($n_C = 1$)

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo rigido sia in equilibrio sotto assegnate forze esterne attive e reattive è che il sistema di tali forze esterne sia nullo (cioè sia nullo il risultante e il momento risultante rispetto ad un polo O scelto arbitrariamente)

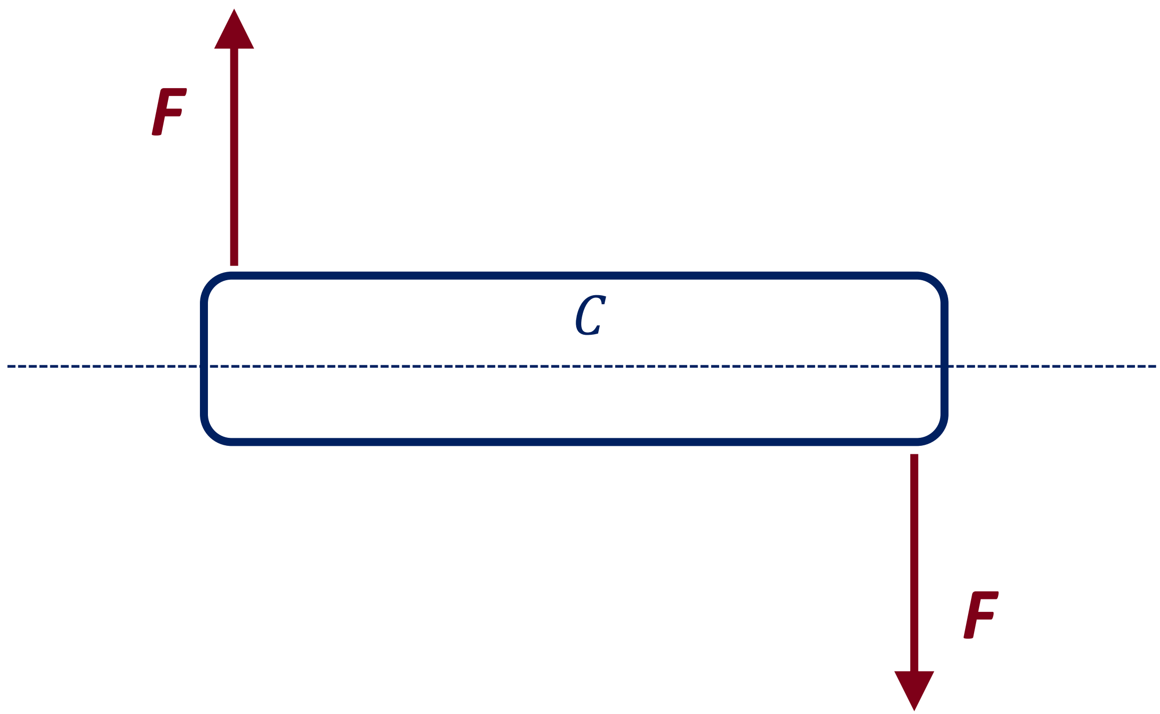
$$\begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \end{cases}$$ *Equazioni cardinali della statica (forma vettoriale)*

Γ^e: forze esterne $(\mathbf{R}, \mathbf{M}_O)$ Γ^a: forze esterne attive $(\mathbf{R}^a, \mathbf{M}_O^a)$ Γ^v: forze esterne reattive $(\mathbf{R}^v, \mathbf{M}_O^v)$

$$\Gamma^e = \Gamma^a \cup \Gamma^v \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{R}^a + \mathbf{R}^v = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O^a + \mathbf{M}_O^v = \mathbf{0} \end{cases}$$ *Equazioni cardinali della statica (forma vettoriale)*



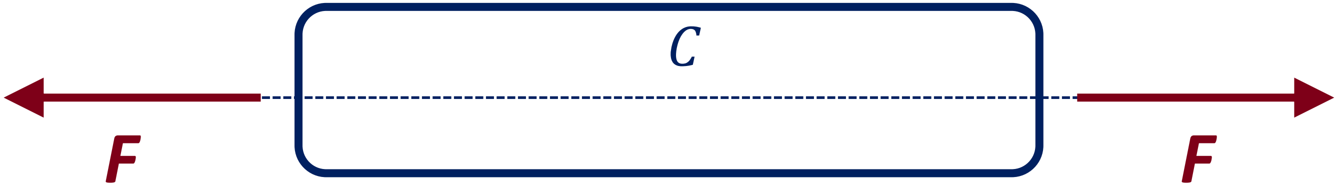
2. Statica del corpo rigido: equazioni cardinali



$$\begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

C non è una configurazione di equilibrio

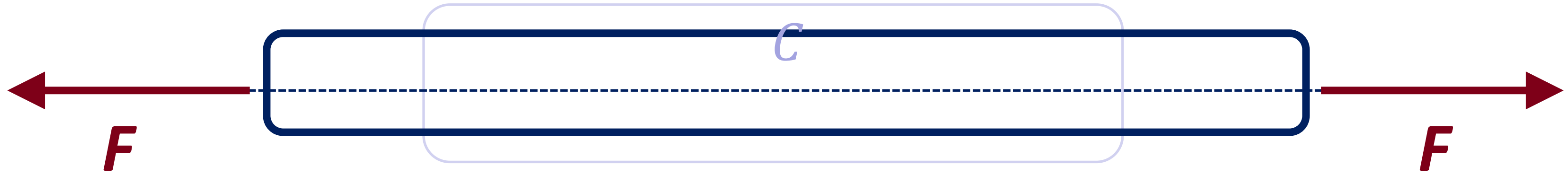
2. Statica del corpo rigido: equazioni cardinali



$$\begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \end{cases}$$

Osservazione

Se il corpo è deformabile la condizione che il sistema delle forze esterne sia nullo in genere è necessaria ma ***non sufficiente*** *per l'equilibrio del corpo*



$$\begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \end{cases}$$

2. Statica del corpo rigido: equazioni cardinali

Equazioni cardinali della statica ($n_C = 1$)

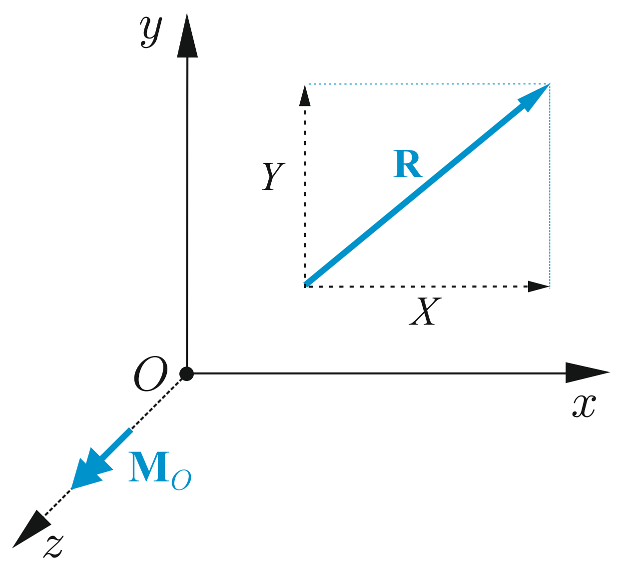
$$\begin{cases} \mathbf{R}^a + \mathbf{R}^v = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O^a + \mathbf{M}_O^v = \mathbf{0} \end{cases}$$

$\mathbf{R}^a = X^a \mathbf{i} + Y^a \mathbf{j}$ $\quad \mathbf{M}_O^a = \mathcal{M}_O^a \mathbf{k}$

$\mathbf{R}^v = X^v \mathbf{i} + Y^v \mathbf{j}$ $\quad \mathbf{M}_O^v = \mathcal{M}_O^v \mathbf{k}$

$$\begin{cases} X^a + X^v = 0 \\ Y^a + Y^v = 0 \\ \mathcal{M}_O^a + \mathcal{M}_O^v = 0 \end{cases}$$

Equazioni cardinali della statica (forma scalare)



2. Statica del corpo rigido: equazioni cardinali

Equazioni cardinali della statica ($n_C > 1$)

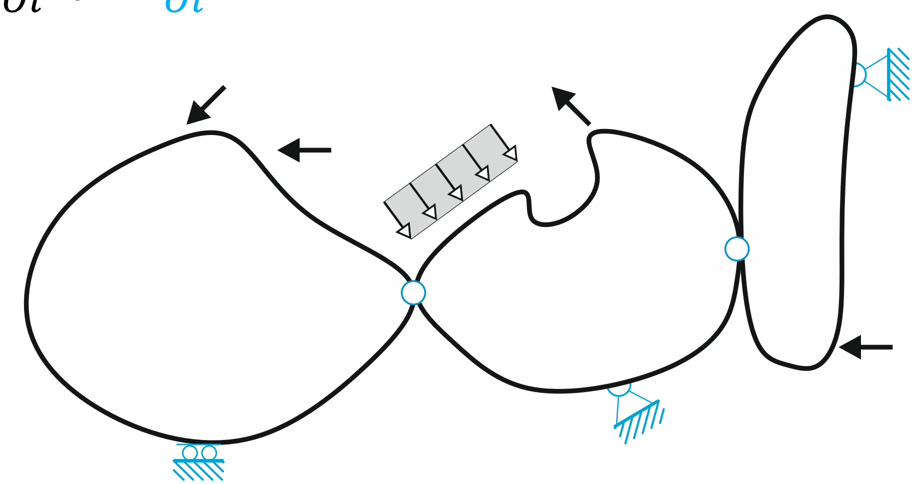
Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di n_C corpi rigidi sia in equilibrio sotto assegnate forze esterne attive e reattive è che il sistema delle forze esterne agenti su ciascun corpo sia nullo

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}_{Oi} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{Oi} = \mathbf{0} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n_C$$

Equazioni cardinali della statica (forma vettoriale)

$$\begin{cases} X_i^a + X_i^v = 0 \\ Y_i^a + Y_i^v = 0 \\ \mathcal{M}_{Oi}^a + \mathcal{M}_{Oi}^v = 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, n_C$$

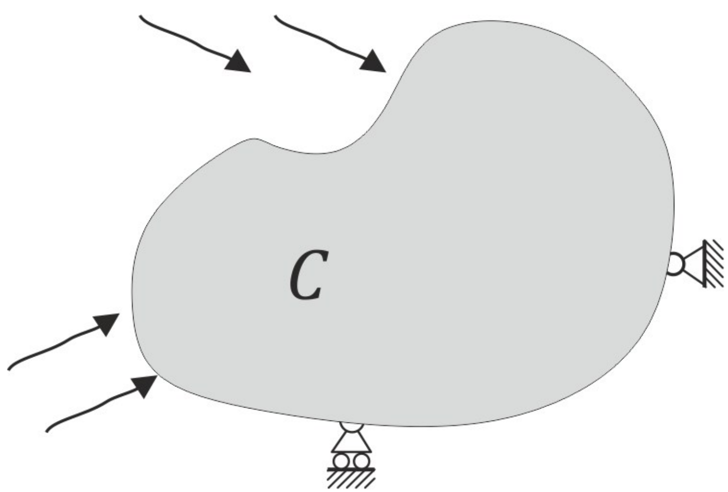
Equazioni cardinali della statica (forma scalare)



2. Statica del corpo rigido: obiettivi

Obiettivo 1. Assegnato un sistema di corpi rigidi vincolato, definire il modello atto a caratterizzare le **forze esterne** agenti. Le forze esterne agenti sui corpi si suddividono in due classi: *forze esterne attive* e *forze esterne reattive* o vincolari. Le forze reattive, generalmente incognite a priori, sono quelle erogate dai vincoli in risposta alle forze attive

Obiettivo 2. Definire le condizioni analitiche che devono rispettare le forze esterne (attive e reattive) affinché la configurazione occupata dal sistema sia d'**equilibrio**.



Una configurazione C si dice di *equilibrio* per un sistema se, ponendo il sistema in C con atto di moto nullo, il sistema vi permane in *quiete*

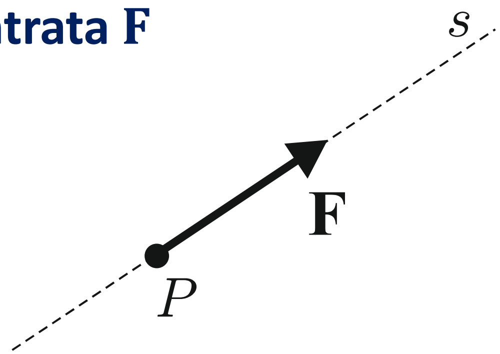
Γ^a : *forze esterne attive*

Γ^v : *forze esterne reattive*

2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Forza concentrata $\mathbf{F}$

$(\boldsymbol{P}, \mathbf{F})$



s: retta d'azione
P: punto di applicazione
$|\mathbf{F}|, F$: modulo o intensità $[F]$

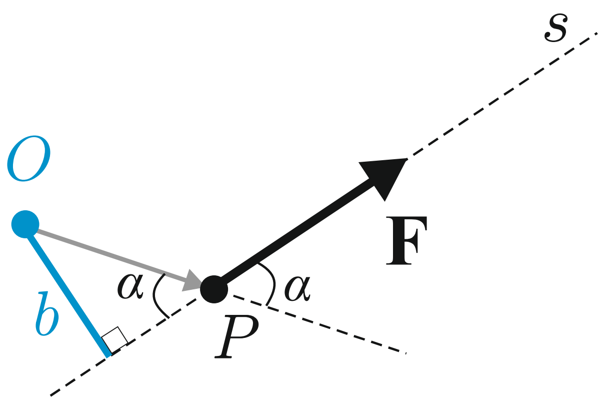
Dimensioni fisiche $[F]$, unità di misura N

Momento di una forza rispetto ad un polo $\boldsymbol{O}$, $\mathbf{M}_{\boldsymbol{O}}$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{F}$$

modulo o intensità: $|\mathbf{M}_{\boldsymbol{O}}|, M_O \quad [Fl]$

$$|\mathbf{M}_{\boldsymbol{O}}| = |\mathbf{F}||\mathbf{OP}|\sin(\alpha) = Fb$$



Braccio: distanza fra la retta d'azione di $\mathbf{F}$ e il polo O

$$b = |\mathbf{OP}|\sin(\alpha)$$

Dimensioni fisiche $[Fl]$, unità di misura Nm

2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Sistema di forze Γ: definizioni

$$\Gamma:(P_i,\mathbf{F}_i),\, i=1,\dots,N$$

***Risultante* $\mathbf{R}$**

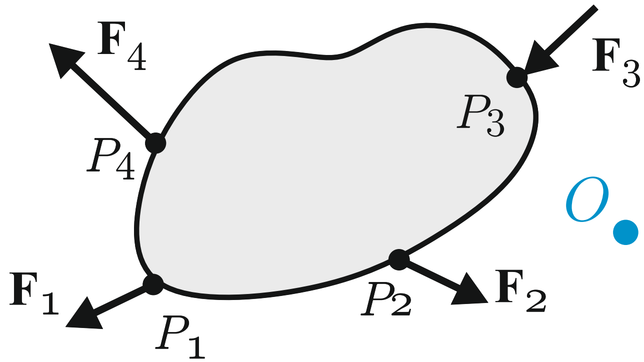
$|\mathbf{R}|$, R*: modulo o intensità.* *Dimensioni fisiche* $[F]$*, unità di misura N*

$$\mathbf{R}=\mathbf{F_1}+\mathbf{F_2}+\cdots+\mathbf{F}_N=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i$$

***Momento risultante* $\mathbf{M}_O$**

$|\mathbf{M}_O|$ *: modulo o intensità.* *Dimensioni fisiche* $[FL]$*, unità di misura Nm*

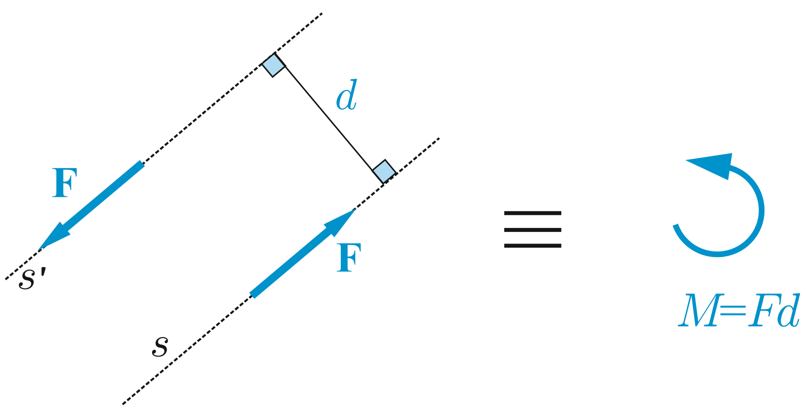
$$\mathbf{M}_O=\mathbf{OP_1}\times\mathbf{F_1}+\cdots+\mathbf{OP}_N\times\mathbf{F}_N=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{OP}_i\times\mathbf{F}_i=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{M}_{Oi}$$

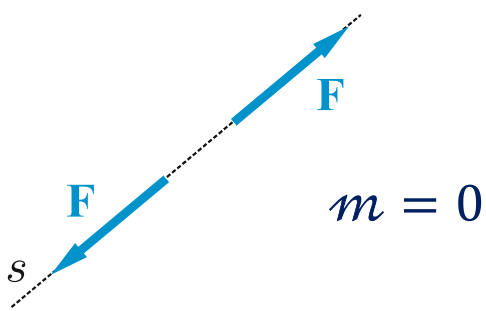


2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Sistemi a risultante nulla: coppia di forze

Si definisce coppia di forze un sistema costituito da due forze ($\mathbf{F}_1$*,* $\mathbf{F}_2$*) che hanno: stessa direzione, stesso modulo, versi opposti; risulta quindi:* $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$.
Per l'osservazione precedente: il momento risultante di una coppia di forze non dipende dal polo scelto.





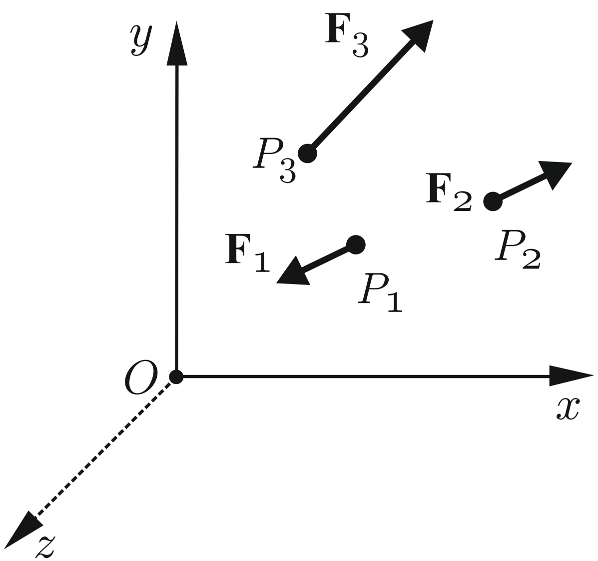
2. Statica del corpo rigido: forze esterne

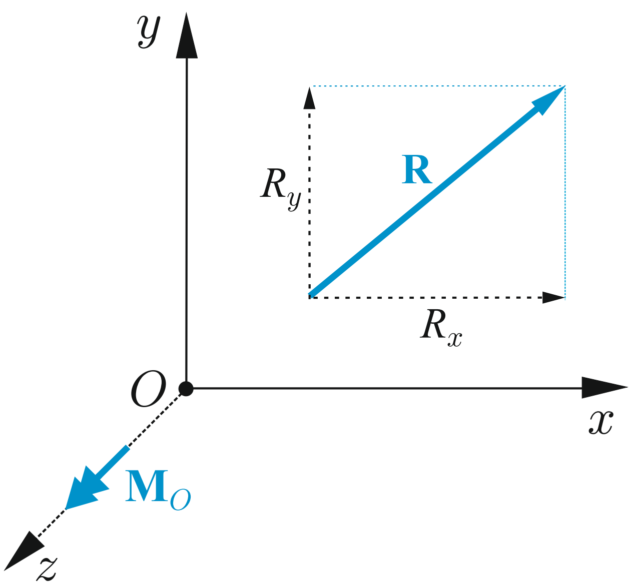
Sistemi piani di forze

Un sistema di forze si dice piano se tutti i vettori forza sono paralleli ad uno stesso piano π. Rispetto ad un polo O scelto sul piano π, i vettori momento delle forze sono tutti paralleli e perpendicolari a π.

Componenti cartesiane

Scelto un sistema cartesiano in cui il piano coordinato xy coincide con π, si ha per il risultante e il vettore risultante





$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j}$$

$$\mathbf{M}_O = M_O\mathbf{k}$$

Coppia di forze nel piano

$$\mathbf{M} = m\mathbf{k}$$

Convenzioni