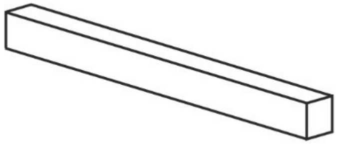
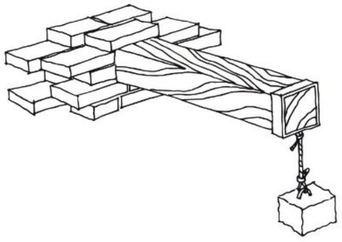
Lezione

Parte II - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni

- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- **Problema elastico**



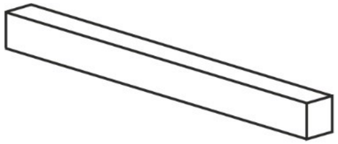
Paolo Casini, Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica. www.pcasini.it

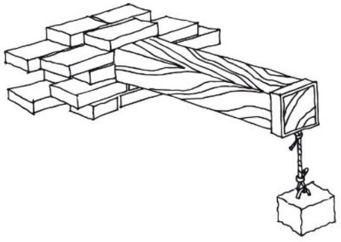
Lezione

Parte II - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni

- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- **Problema elastico**
  - Metodo degli spostamenti
  - Metodo delle Forze



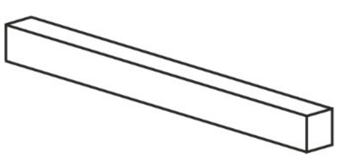
Paolo Casini, Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica. www.pcasini.it

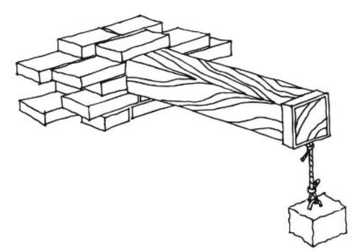
Lezione

Parte II - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni

- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- **Problema elastico**
  - **- Metodo degli spostamenti**
  - - Metodo delle Forze



Parte II - Il modello di trave elastica 1D

Lezione

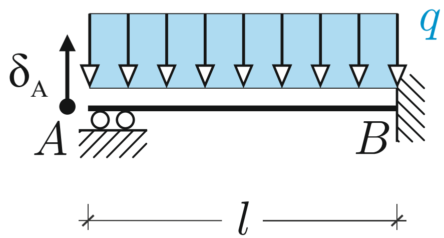
5. Metodo degli spostamenti (linea elastica)

- **Obiettivi**
- **Equazioni della linea elastica**
  - Problema assiale
  - Problema flessionale
  - Condizioni al contorno
- **Esercizi** (sito: E14; testo §9.4-9.6) (Esonero)

4. Problema elastico (elastostatico)

Assegnata una trave o un sistema di travi vincolato *in equilibrio* sotto azioni esterne note determinare, se esiste, la *risposta strutturale* in termini di spostamenti, deformazioni e forze interne.

esempio



Azioni Esterne → **Struttura** → **Risposta Strutturale**

- forze esterne,
- variazioni termiche,
- cedimenti vincolari,

etc.

- geometria,
- materiali costitutivi,
- condizioni di vincolo,

etc.

INCOGNITE

- spostamenti, deformazioni
- forze interne, (caratteristiche della sollecitazione)

$$\boxed{\gamma(z) = 0, GA_t \to \infty}$$

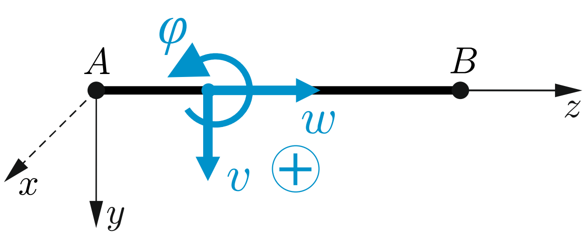
Incognite cinematiche

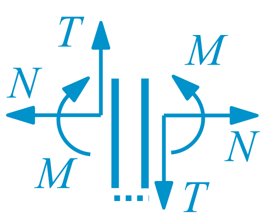
$w(z) \quad v(z) \quad \varphi(z)$

$\varepsilon(z) \quad \chi(z)$

Incognite statiche

$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$





5. Metodo degli spostamenti: obiettivi

Obiettivi: risolvere il problema elastico assumendo come *incognite primarie* gli **spostamenti** dei punti della linea d'asse della trave. Noti gli spostamenti, si determinano successivamente le altre incognite del problema.

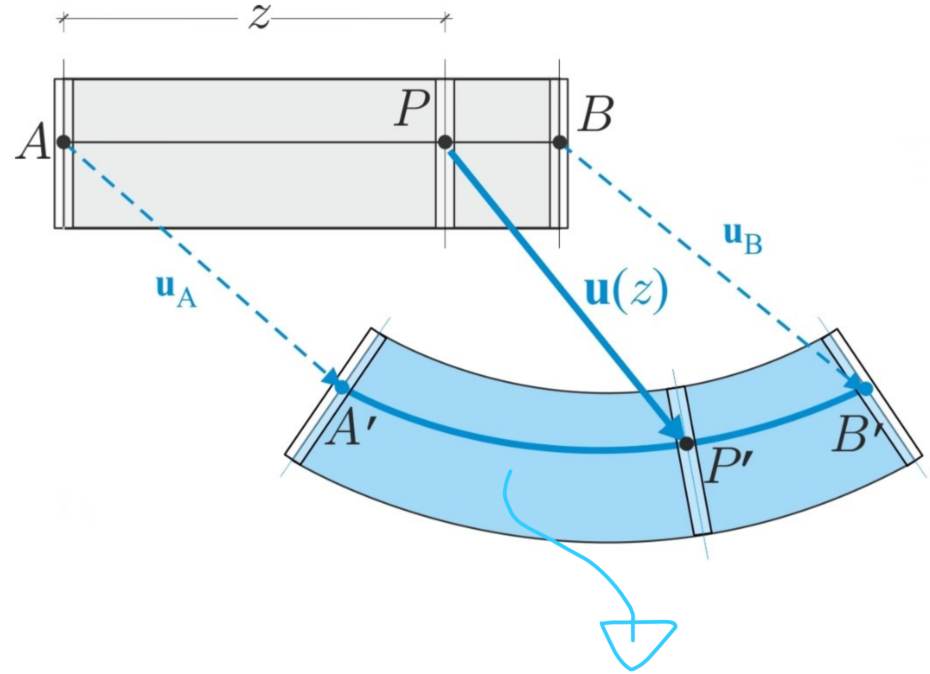
Incognite primarie: spostamenti w e u

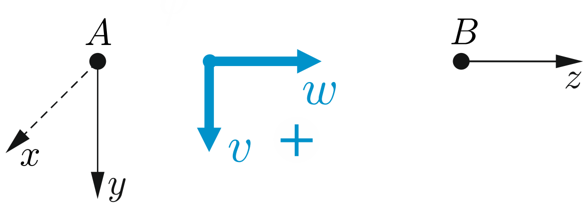
$w(z) \quad v(z)$

$\varphi(z)$

$\varepsilon(z) \quad \chi(z)$

$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$





Linea elastica
(assetto della linea d'asse nella configurazione C')

5. Metodo degli spostamenti (Eulero-Bernoulli)

$$\boxed{\gamma(z) = 0, GA_t \to \infty}$$

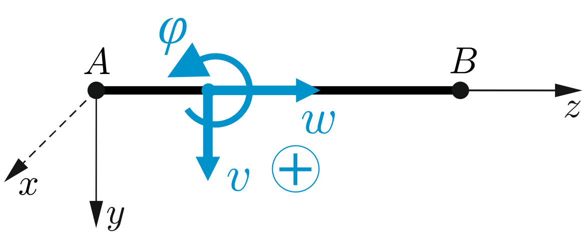
Incognite cinematiche

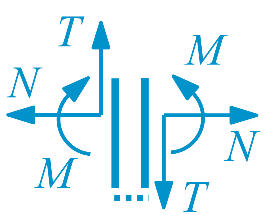
$w(z) \quad v(z) \quad \varphi(z)$

$\varepsilon(z) \quad \chi(z)$

Incognite statiche

$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$





Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \varphi(z) = -v'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} \qquad + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} \quad + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA\,\varepsilon(z) \\ M(z) = EI\,\chi(z) \end{cases} (Hooke)$$

5. Metodo degli spostamenti

$$\boxed{\gamma(z) = 0, GA_t \to \infty}$$

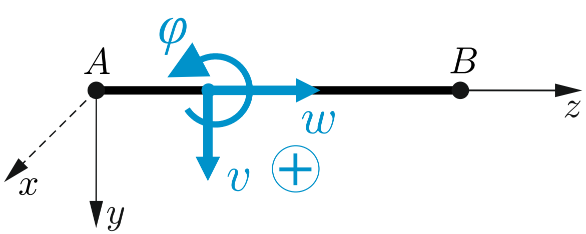
Incognite cinematiche

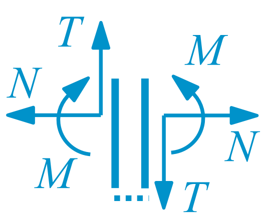
$w(z) \quad v(z)$

$\varepsilon(z) \qquad \chi(z)$

Incognite statiche

$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$





Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} \quad + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} \quad + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA\,\varepsilon(z) \\ M(z) = EI\,\chi(z) \end{cases} (Hooke)$$

5. Metodo degli spostamenti

Incognite cinematiche

$w(z) \quad v(z)$

$\varepsilon(z) \qquad \chi(z)$

Incognite statiche

$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$

Problema assiale

Cinematica: equazioni di congruenza

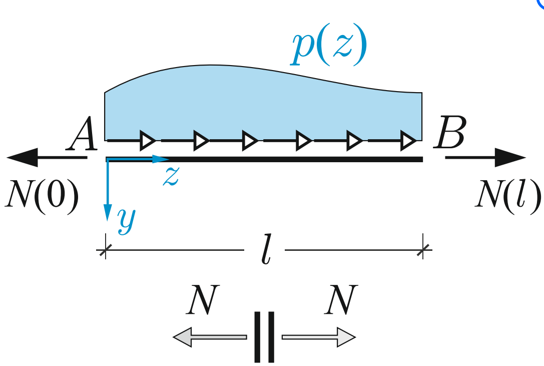
$$\begin{cases} \boxed{\varepsilon(z) = w'(z)} \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

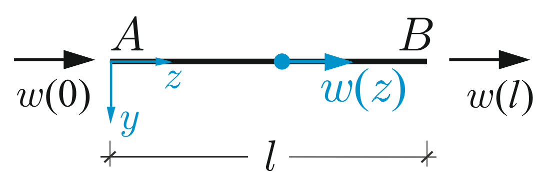
Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} \boxed{N'(z) + p(z) = 0} \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} \boxed{N(z) = EA\,\varepsilon(z)} \\ M(z) = EI\,\chi(z) \end{cases} (Hooke)$$





5. Metodo degli spostamenti

Incognite cinematiche

$w(z)$ $v(z)$

$\varepsilon(z)$ $\chi(z)$

Incognite statiche

$N(z)$ $T(z)$ $M(z)$

Problema flessionale (Eulero-Bernouilli)

Cinematica: equazioni di congruenza

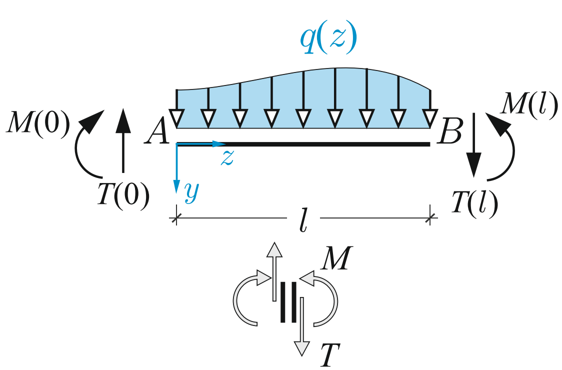
$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} \quad + c.c.$$

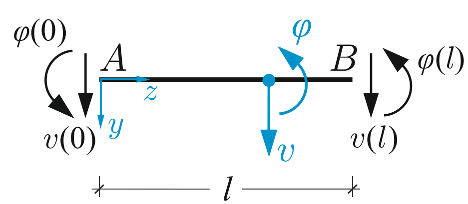
Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} \quad + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA\,\varepsilon(z) \\ M(z) = EI\,\chi(z) \end{cases} \quad (Hooke)$$





5. Metodo degli spostamenti

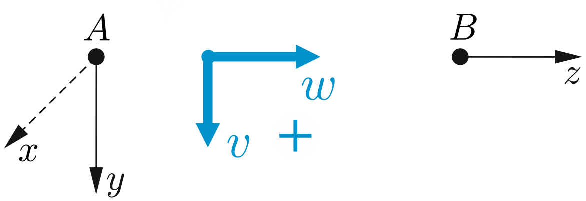
Incognite primarie: spostamenti w e u

$w(z) \quad v(z)$

$\varphi(z) = -v'(z)$

$\varepsilon(z) \quad \chi(z)$

$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$



Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA\,\varepsilon(z) \\ M(z) = EI\,\chi(z) \end{cases} (Hooke)$$

5. Metodo degli spostamenti: problema assiale

Incognite

$w(z)$

$\varepsilon(z)$

$N(z)$

Cinematica: equazioni di congruenza

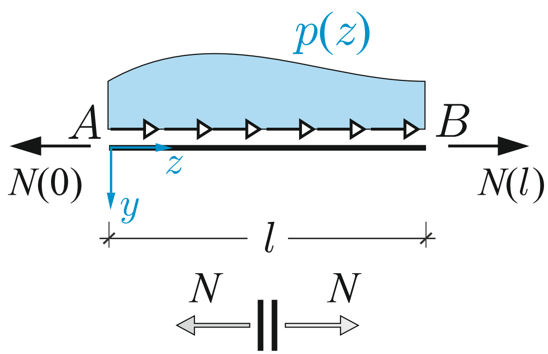
$$\varepsilon(z) = w'(z)$$

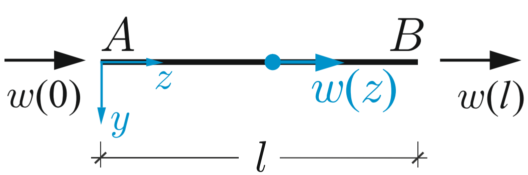
Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$N'(z) + p(z) = 0$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$N(z) = EA\,\varepsilon(z)$$





$$N(z) = EAw'(z) \quad \rightarrow \quad \left(EAw'(z)\right)' + p(z) = 0 \; + \text{c.c}$$

5. Metodo degli spostamenti: problema assiale

Incognite

$w(z)$

$\varepsilon(z)$

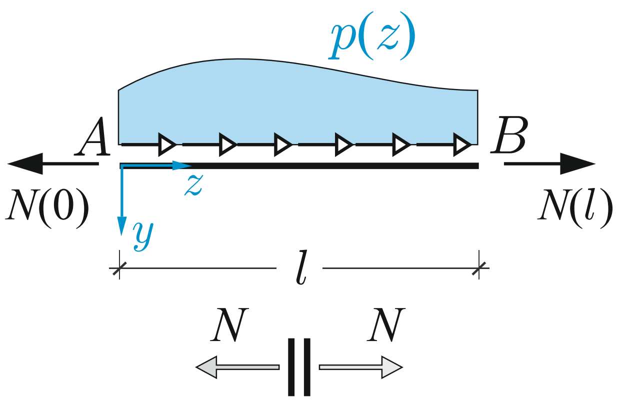
$N(z)$

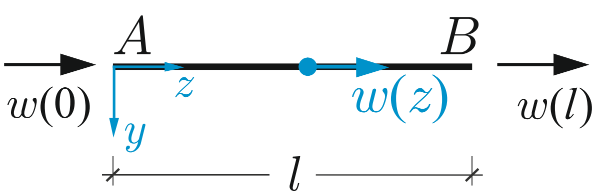
Equazione della trave tesa

$$\boxed{EAw''(z) + p(z) = 0 \ + \text{c.c}}$$

$$\varepsilon(z) = w'(z)$$

$$N(z) = EAw'(z)$$





5. Metodo degli spostamenti: problema flessionale

Incognite

$v(z)$

$\chi(z)$

$T(z), M(z)$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\chi(z) = -v''(z)$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases}$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$M(z) = EI\,\chi(z)$$

$$M(z) = -EI v''(z) \qquad M''(z) - T'(z) = 0$$

$$M''(z) + q(z) = 0 \rightarrow \boxed{-\left(EI v''(z)\right)'' + q(z) = 0}$$

5. Metodo degli spostamenti: problema flessionale

Equazione della linea elastica

Incognite

$v(z)$

$\chi(z)$

$T(z), M(z)$

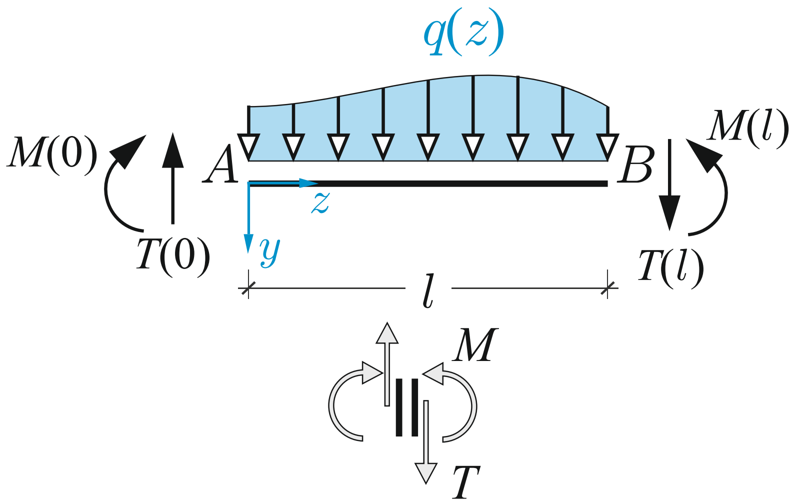
$$\boxed{EIv^{IV}(z) = q(z) \; + \text{c.c}}$$

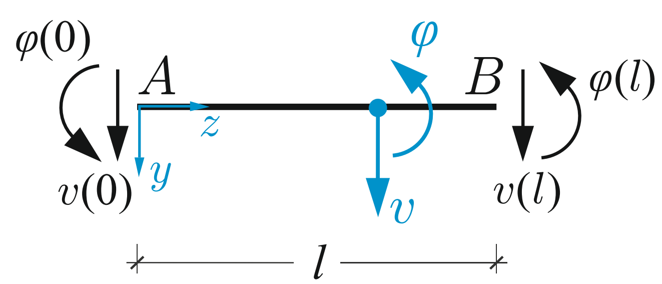
$$\varphi(z) = -v'(z)$$

$$\chi(z) = -v''(z)$$

$$T(z) = M'(z) = -EIv'''(z)$$

$$M(z) = -EIv''(z)$$





5. Metodo degli spostamenti: riepilogo

Incognite

$w(z) \quad v(z)$

$\varepsilon(z) \quad \chi(z)$

$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$

$$\varphi(z) = -v'(z)$$

$$\begin{cases} N(z) = EA\, w'(z) \\ T(z) = -EI\, v'''(z) \\ M(z) = -EI\, v''(z) \end{cases}$$

Equazione della trave tesa

$$EAw''(z) + p(z) = 0 \;+ \mathrm{c.c} \quad (1)$$

Equazione della linea elastica

$$EIv'^{v}(z) = q(z) \;+ \mathrm{c.c} \quad (2)$$

NB1 Le equazioni precedenti sono valide per *un'unica trave* con vincoli alle estremità, eventuali forze distribuite variabili con continuità, eventuali forze o coppie concentrate applicate solo alle estremità.

Lo studio si estende immediatamente *ai sistemi di travi* anche in presenza di discontinuità lungo la linea d'asse.

NB2 I problemi assiale e flessionale sono disaccoppiati nelle equazioni, ma potrebbero essere accoppiati nelle condizioni al contorno (ad es. in presenza di un carrello o un glifo il cui asse forma un angolo diverso da 0 o da $\frac{\pi}{2}$ con l'asse della trave)

5. Metodo degli spostamenti: riepilogo

Incognite

$w(z)$ $v(z)$

$\varepsilon(z)$ $\chi(z)$

$N(z)$ $T(z)$ $M(z)$

$$\varphi(z) = -v'(z)$$

$$\begin{cases} N(z) = EA\, w'(z) \\ T(z) = -EI\, v'''(z) \\ M(z) = -EI\, v''(z) \end{cases}$$

Equazione della trave tesa

$$EAw''(z) + p(z) = 0 \ + \text{c.c} \quad (1)$$

Equazione della linea elastica

$$EIv^{IV}(z) = q(z) \ + \text{c.c} \quad (2)$$

NB3 Si è fatta l'ipotesi di materiale omogeneo e sezione costante: EA, EI uniformi

NB4 Poiché l'Eq. (1) è un equaz. diff. lineare del *secondo ordine in $w(z)$* si devono utilizzare *c.c.* di ordine non superiore al primo: pertanto quest'ultime possono riguardare solo gli spostamenti w o le forze normali alle estremità EAw'

NB5 Poiché l'Eq. (2) è un equaz. diff. lineare del *quarto ordine in $v(z)$* si devono utilizzare *c.c.* di ordine non superiore al terzo: pertanto quest'ultime possono riguardare solo gli spostamenti v le rotazioni $-v'$, o le forze di taglio $-EIv'''$ e i momenti flettettenti $-EIv''$ alle estremità.