

*Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza*

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:

Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



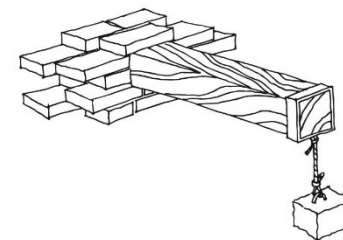
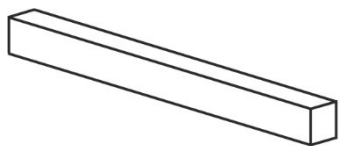
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



Lezione

Parte II - Il modello di trave elastica 1D

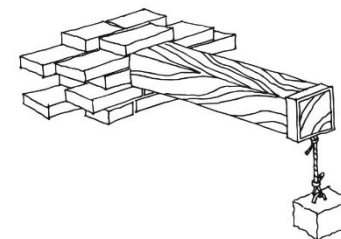
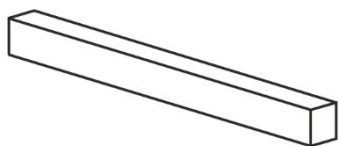
- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



Lezione

Parte II - Il modello di trave elastica 1D

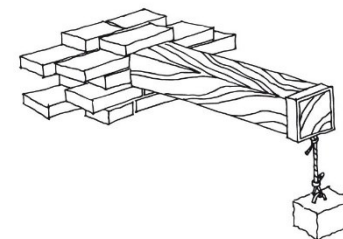
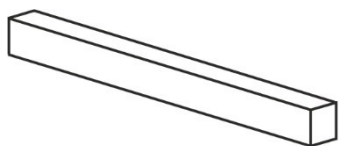
- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



Lezione

Parte II - Il modello di trave elastica 1D

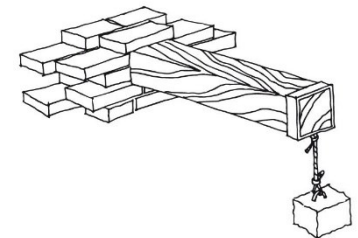
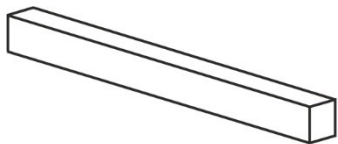
- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- **Statica della trave**
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



Lezione

Parte II - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- **Materiale: legame costitutivo**
- Problema elastico



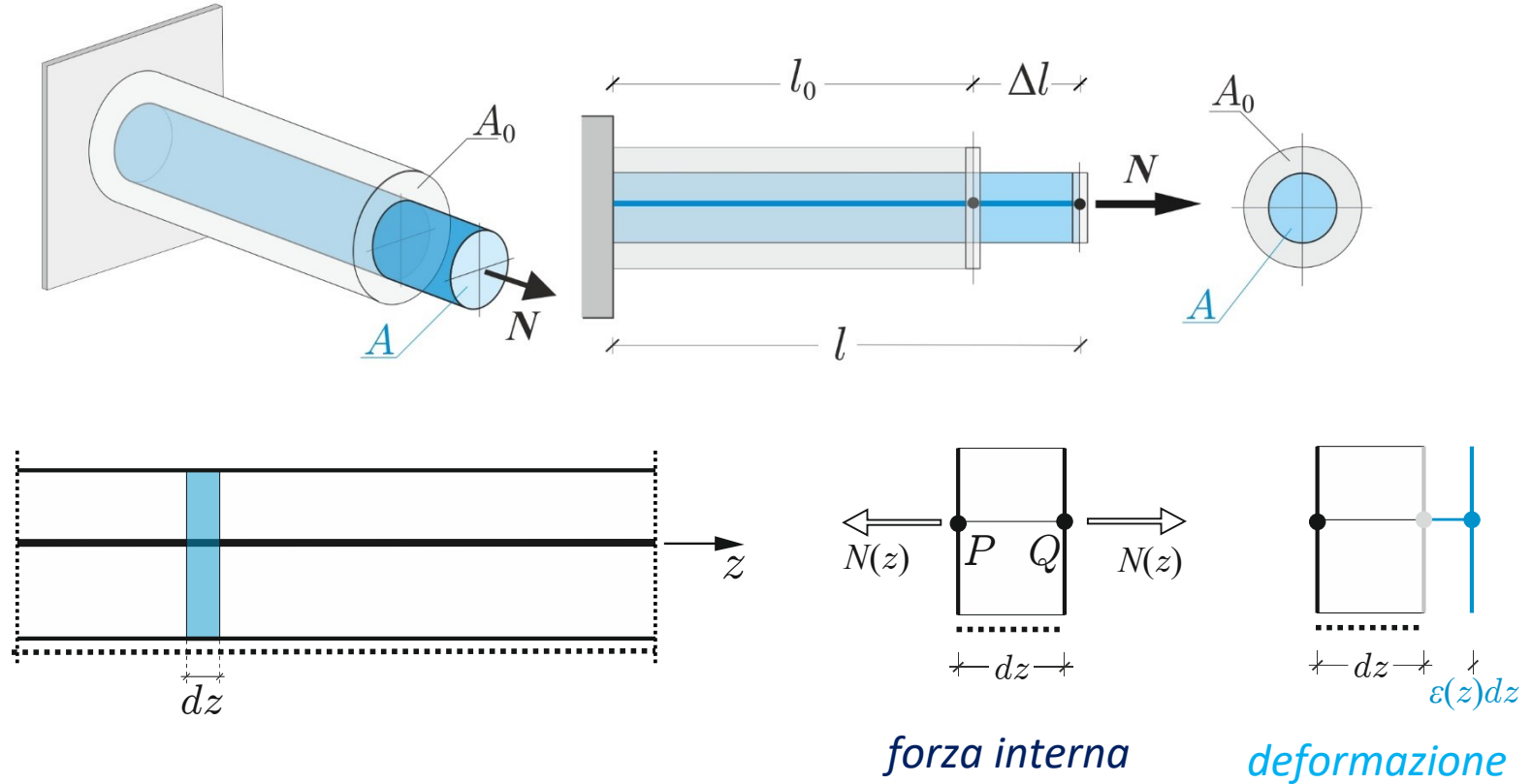


Parte II - Il modello di trave elastica 1D

3. Materiale: legame costitutivo

- **Obiettivi**
- **Prova uniassiale**
- **Fenomenologia**
 - materiali duttili
 - materiali fragili
- **Comportamento elastico lineare**
 - Legge di Hooke
- **Equazioni di legame costitutivo per la trave**

3. Legame costitutivo: obiettivi



$$N(z) \leftrightarrow \varepsilon(z) \quad ?$$

$$T(z) \leftrightarrow \gamma(z) \quad ?$$

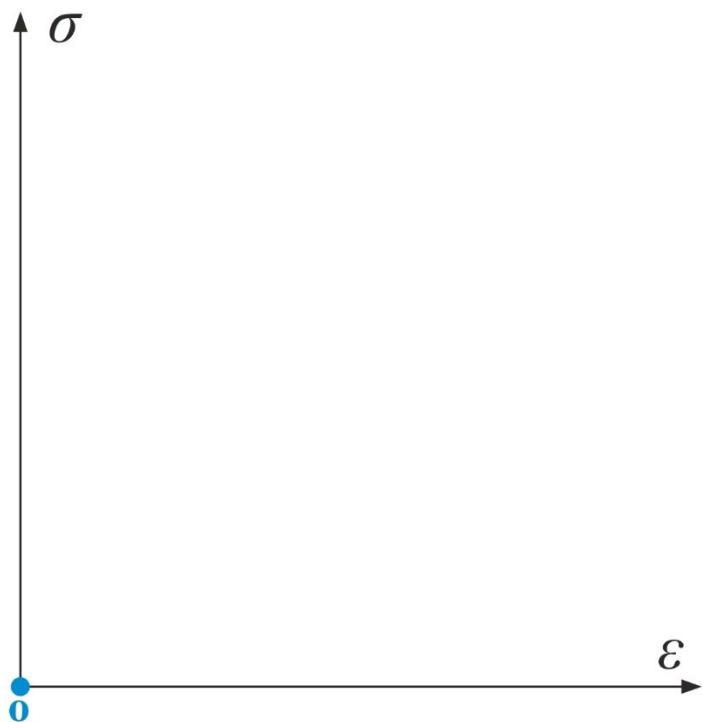
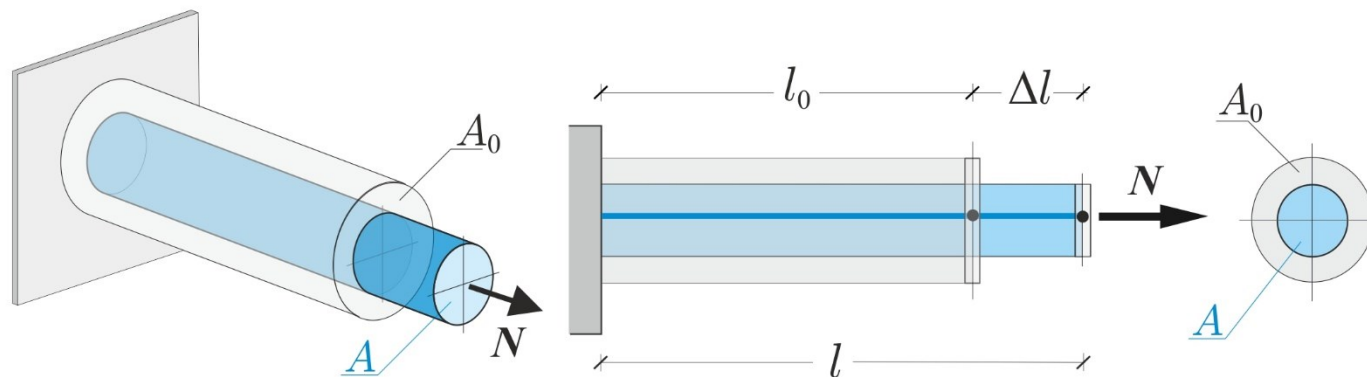
$$M(z) \leftrightarrow \chi(z) \quad ?$$

Materiale?

Indagini sperimentali:

- prova uniassiale
- prova a torsione

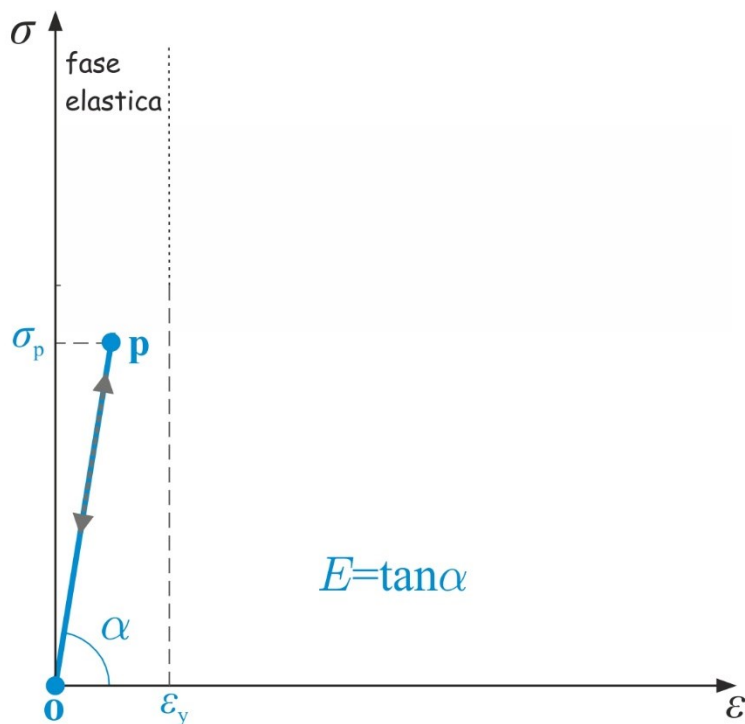
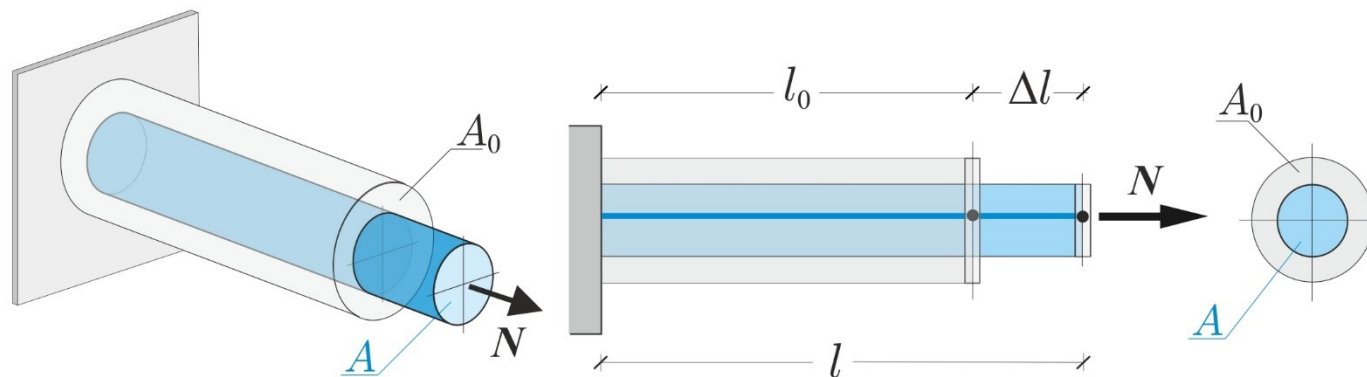
3. Legame costitutivo: prova uniassiale



$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[FL^{-2}]$ $[0]$

3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



FASE ELASTICA

o-p → comportamento elastico lineare

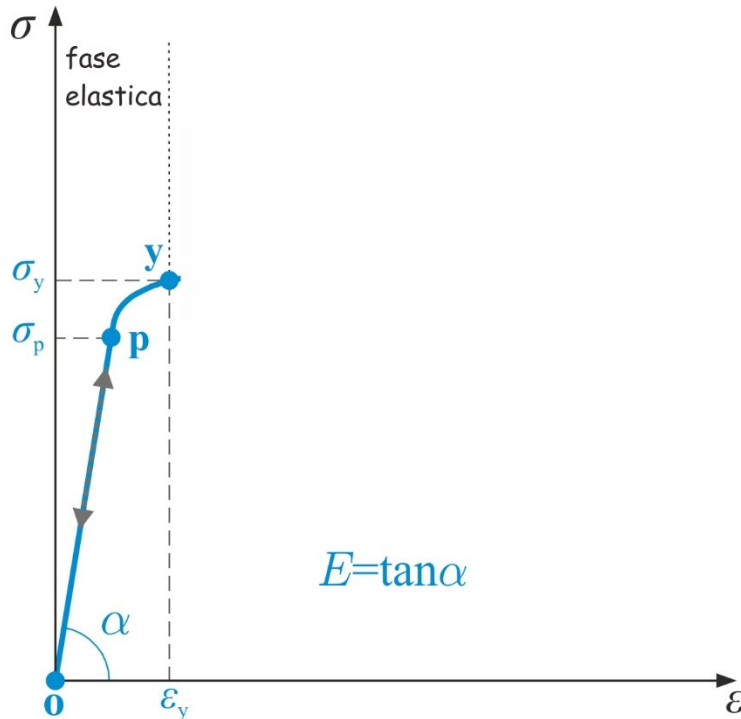
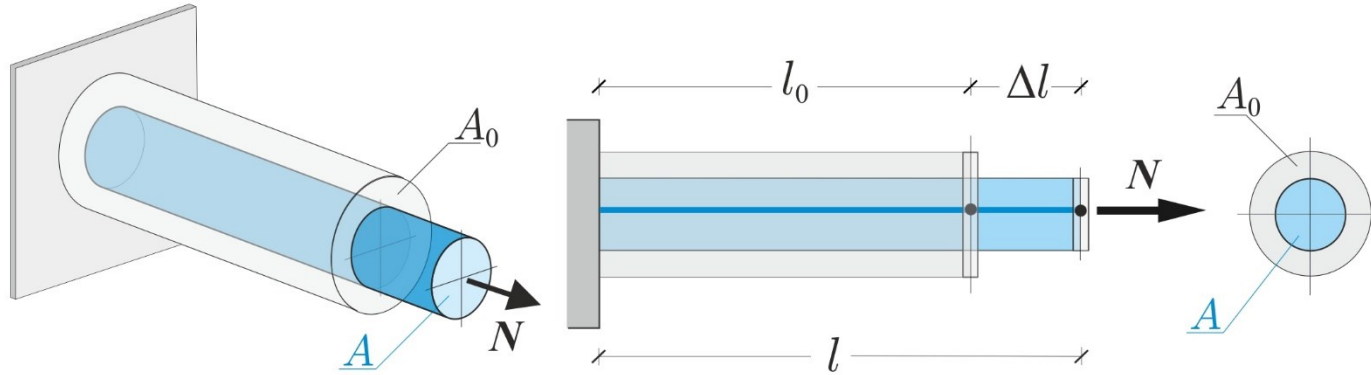
o → stato iniziale

p → limite di proporzionalità

$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[FL^{-2}]$ $[0]$

3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



FASE ELASTICA

$o-p \rightarrow$ comportamento elastico lineare

$o \rightarrow$ stato iniziale

$p \rightarrow$ limite di proporzionalità

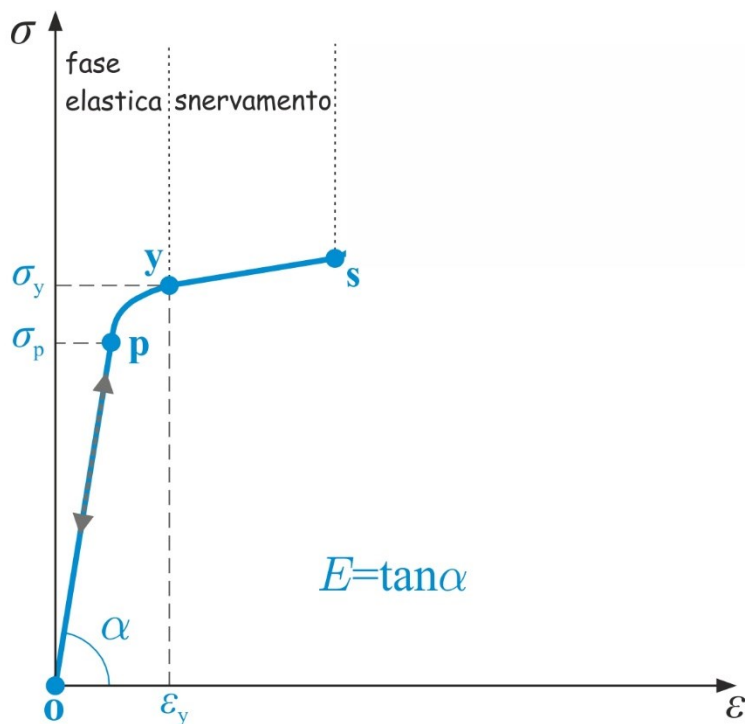
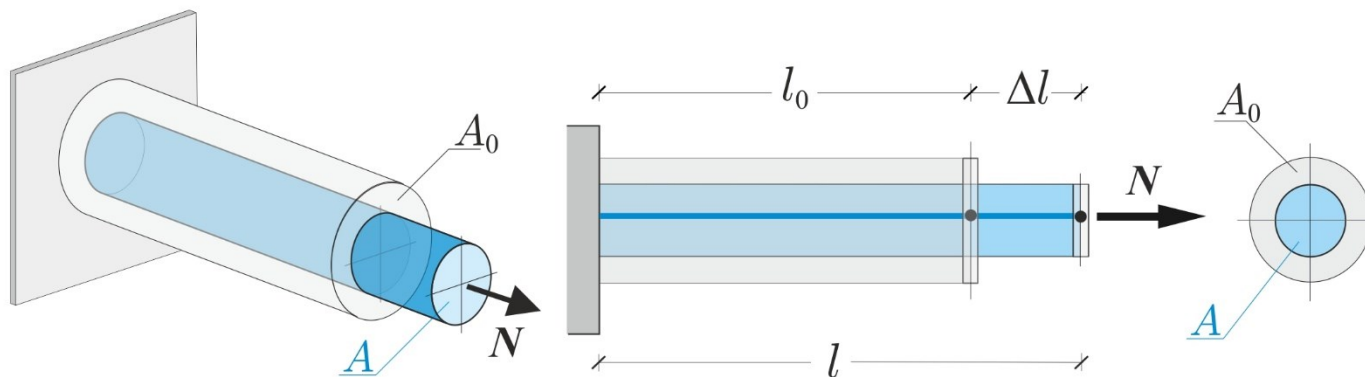
$p-y \rightarrow$ comportamento elast. non lineare

$y \rightarrow$ limite di elasticità

$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[FL^{-2}]$ $[0]$

3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



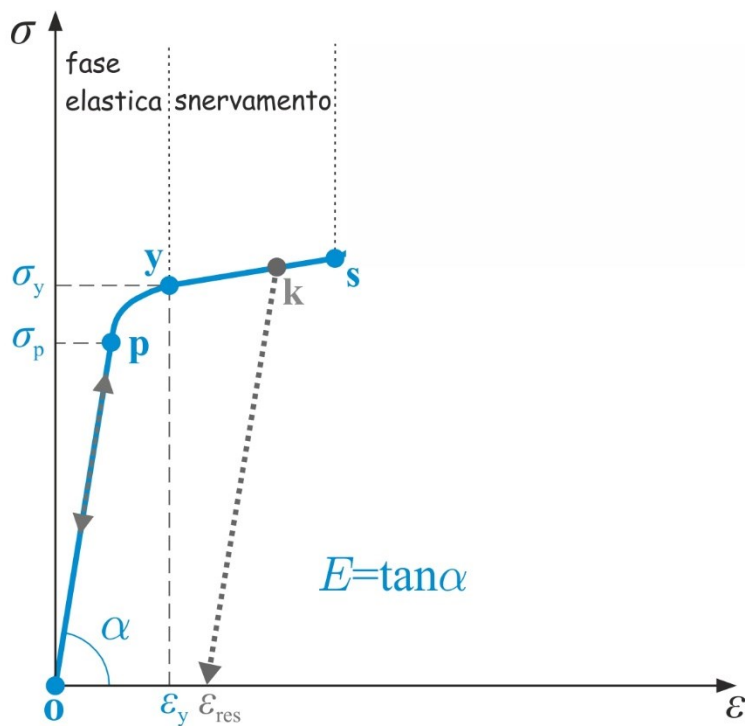
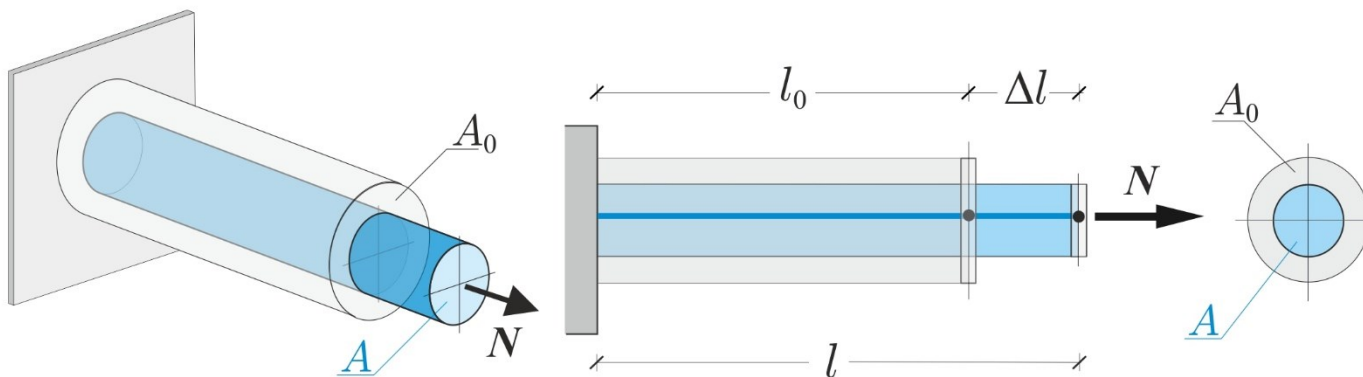
FASE PLASTICA

$y-s \rightarrow$ snervamento

$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[FL^{-2}]$ $[0]$

3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



FASE PLASTICA

$y-s \rightarrow$ snervamento

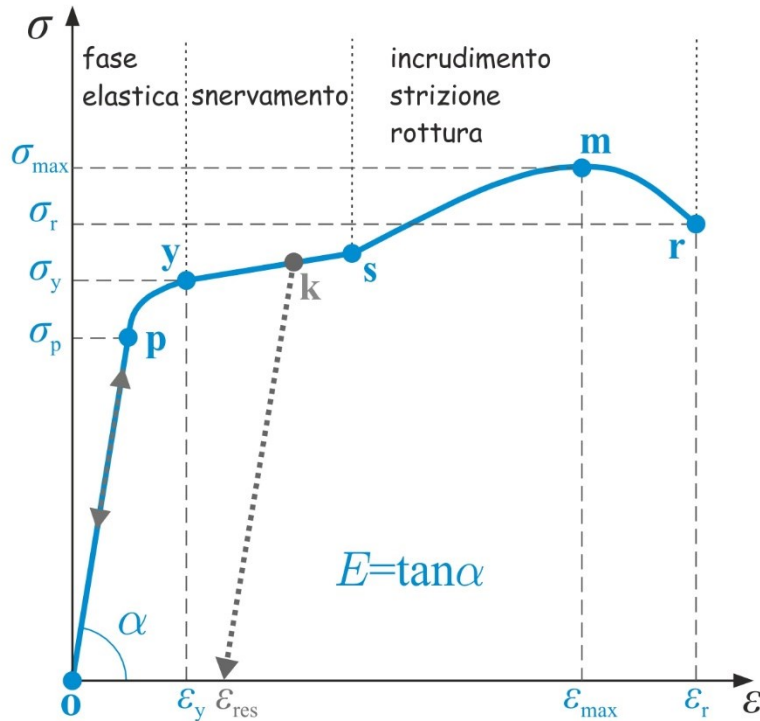
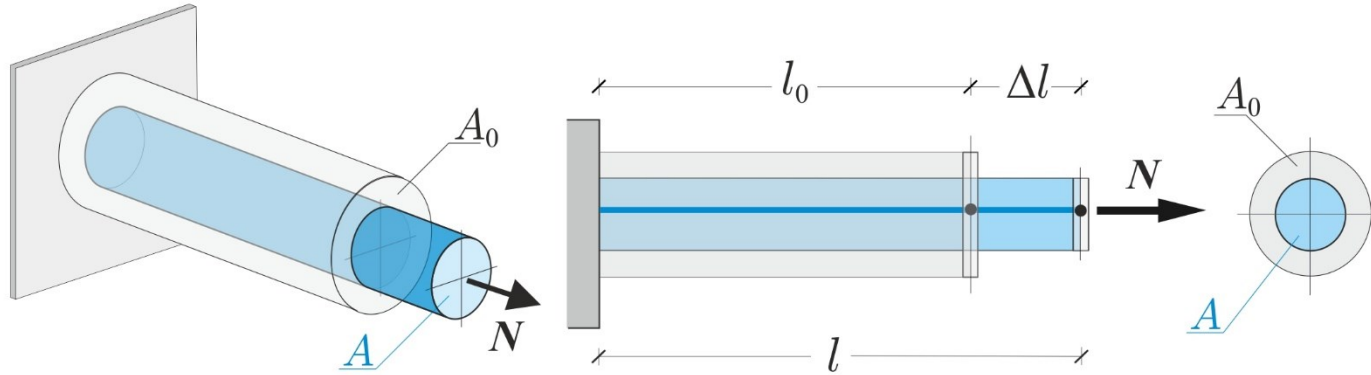
$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A}$$

$[FL^{-2}]$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[0]$

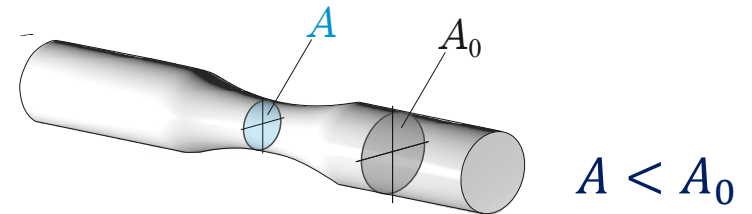
3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



FASE PLASTICA

$s-m \rightarrow$ *incrudimento*

$r \rightarrow$ *punto di rottura*



$$\sigma = \frac{N}{A_0} < \frac{N}{A} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

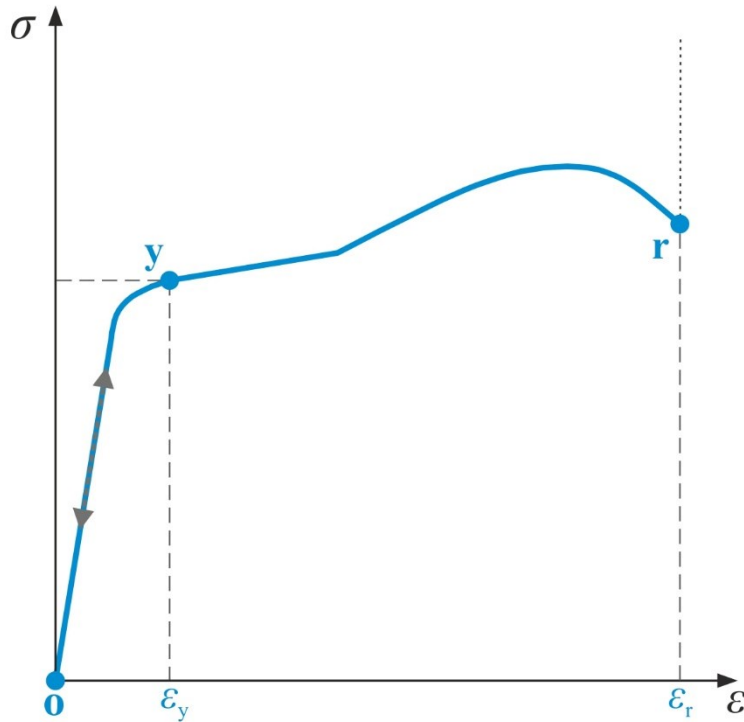
$[FL^{-2}]$ $[0]$



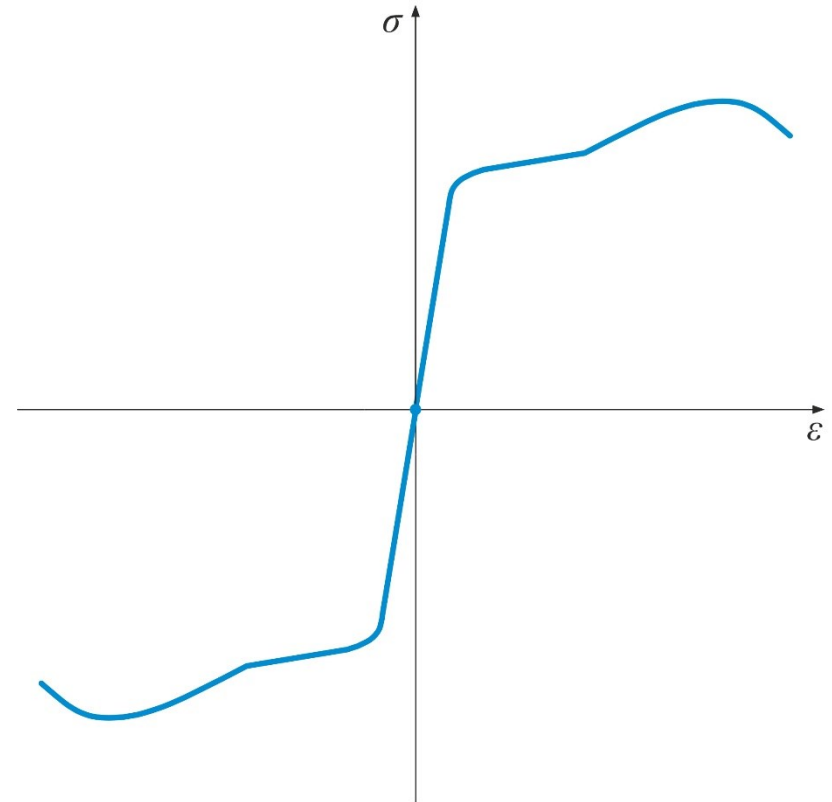
3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili

DUTTILITA'

$$\mu = \varepsilon_r - \varepsilon_y$$

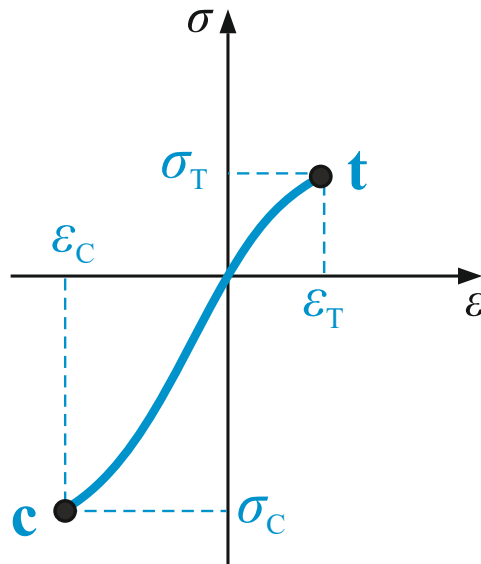
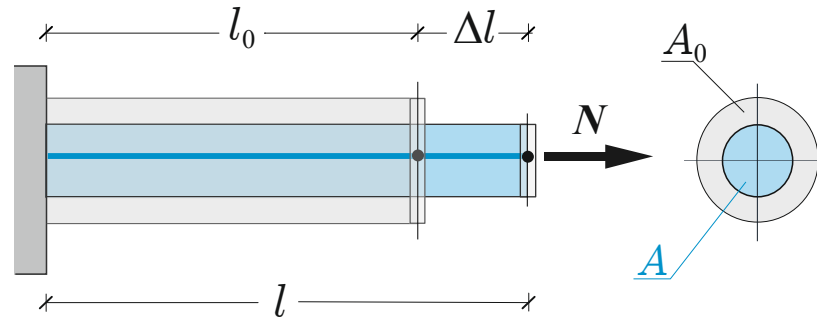
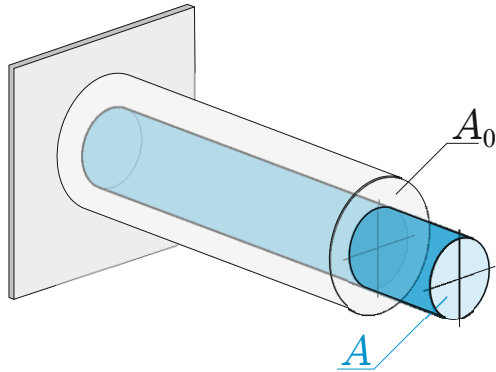


SIMMETRIA





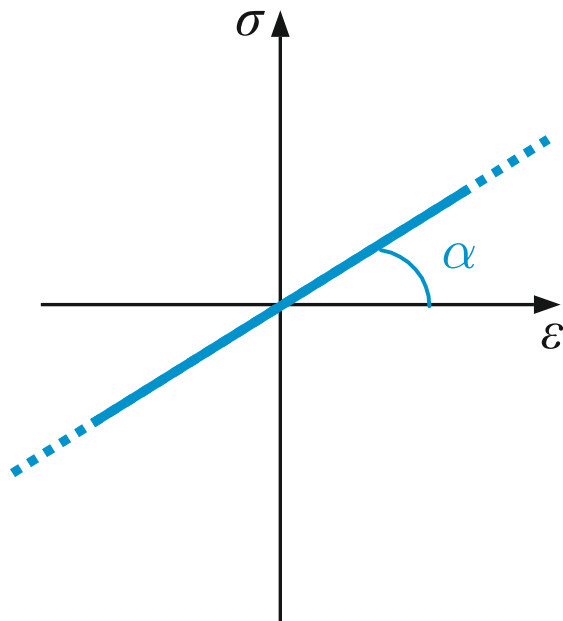
3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali fragili



t → punto di rottura a trazione

c → punto di rottura a compressione

3. Legame costitutivo: legame elastico lineare



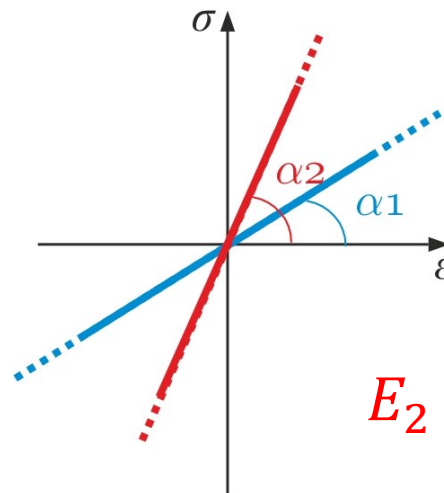
$$E = \tan \alpha \rightarrow \text{Modulo di Young } [FL^{-2}]$$

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

→ Legge di Hooke

$\sigma = m \varepsilon = \tan \alpha \varepsilon$
(equazione cartesiana della retta
passante per l'origine di coefficiente
angolare m)



$$E_2 > E_1$$



3. Legame costitutivo: legame elastico lineare

Materiale	ρ [kg/m³]	E [GPa]	ν	α [°C⁻¹]
Acciaio strutturale	7860	200–210	0.3	$1.17 \cdot 10^{-5}$
Leghe di Alluminio	2600–2800	70–75	0.34	$2.35 \cdot 10^{-5}$
Rame	8900	120	0.36	$1.69 \cdot 10^{-5}$
Titanio	4700	110–120	0.34	$0.90 \cdot 10^{-5}$
Calcestruzzo	2400–2500	25–30	0.12	$0.99 \cdot 10^{-5}$
Muratura (mattoni pieni)	1800	30		$0.60 \cdot 10^{-5}$
Marmo	2700	55		$1.08 \cdot 10^{-5}$
Granito	2770	70		$0.72 \cdot 10^{-5}$
Legno (lungo le fibre)	400–720	9–15		$0.40 \cdot 10^{-5}$
Gomma	900	<1	0.49	$16.0 \cdot 10^{-5}$

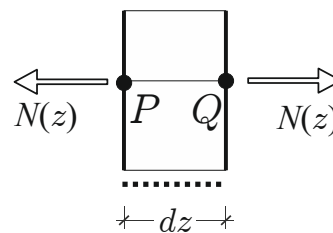
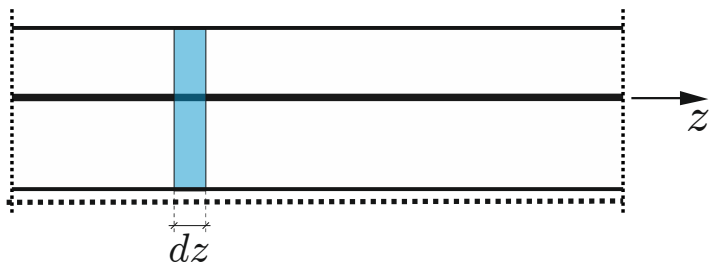
3. Legame costitutivo: legge di Hooke per la trave

provino

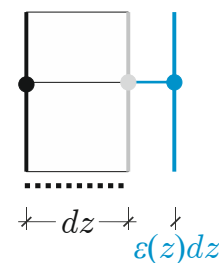
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$
$$\sigma = \frac{N}{A}$$
$$\rightarrow \varepsilon = \frac{N}{EA}$$

Elemento infinitesimo

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA}$$



forza interna



deformazione



3. Legame costitutivo: equazioni costitutive per la trave elastica

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA}$$

$$\gamma(z) = \frac{T(z)}{GA_t}$$

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI}$$

Caratteristiche del materiale

E → Modulo di Young [FL^{-2}]

G → Modulo di rigidezza tangenziale [FL^{-2}]

Caratteristiche della sezione retta

A → Area [L^2]

A_t → Area di taglio [L^2]

$I = I_x$ → Momento d'inerzia rispetto all'asse locale x [L^4]

Rigidezze della trave

EA → Rigidezza assiale [F]

GA_t → Rigidezza di taglio [F]

EI → Rigidezza flessionale [FL^2]

$EA \rightarrow \infty$ Trave inestensibile elasticamente

$GA_t \rightarrow \infty$ Trave indeformabile a taglio
(Eulero-Bernouilli)



3. Legame costitutivo: equazioni costitutive in presenza di deformazioni anelastiche $\varepsilon_t, \gamma_t, \chi_t$

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA} + \varepsilon_t(z)$$

$$\gamma(z) = \frac{T(z)}{GA_t} + \gamma_t(z)$$

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI} + \chi_t(z)$$

Esempio: variazione di temperatura uniforme

$$\varepsilon_t(z) = \alpha \Delta T$$

$$\gamma_t(z) = 0$$

$$\chi_t(z) = 0$$

Caratteristiche del materiale

E → Modulo di Young [FL^{-2}]

α → coeff. di dilatazione termica [T^{-1}]



3. Legame costitutivo: equazioni costitutive in presenza di deformazioni anelastiche $\varepsilon_t, \gamma_t, \chi_t$

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA} + \alpha\Delta T$$

$$\gamma(z) = \frac{T(z)}{GA_t}$$

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI}$$

Esempio: variazione di temperatura uniforme

$$\varepsilon_t(z) = \alpha\Delta T$$

$$\gamma_t(z) = 0$$

$$\chi_t(z) = 0$$

Caratteristiche del materiale

E → Modulo di Young [FL^{-2}]

α → coeff. di dilatazione termica [T^{-1}]



3. Legame costitutivo: equazioni costitutive in presenza di deformazioni anelastiche $\varepsilon_t, \gamma_t, \chi_t$

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA} + \varepsilon_t(z)$$

$$\gamma(z) = \frac{T(z)}{GA_t} + \gamma_t(z)$$

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI} + \chi_t(z)$$

Esempio: temperatura variabile linearmente lungo l'altezza h della sezione da T_1 a $T_2 > T_1$

$$\varepsilon_t(z) = \alpha \frac{T_2 + T_1}{2}$$

$$\gamma_t(z) = 0$$

$$\chi_t(z) = 2\alpha \frac{T_2 - T_1}{h}$$



3. Legame costitutivo: equazioni costitutive in presenza di deformazioni anelastiche $\varepsilon_t, \gamma_t, \chi_t$

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA} + \alpha \frac{T_2 + T_1}{2}$$

$$\gamma(z) = \frac{T(z)}{GA_t}$$

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI} + 2\alpha \frac{T_2 - T_1}{h}$$

Esempio: temperatura variabile linearmente lungo l'altezza h della sezione da T_1 a $T_2 > T_1$

$$\varepsilon_t(z) = \alpha \frac{T_2 + T_1}{2}$$

$$\gamma_t(z) = 0$$

$$\chi_t(z) = 2\alpha \frac{T_2 - T_1}{h}$$