

*Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza*

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:

Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



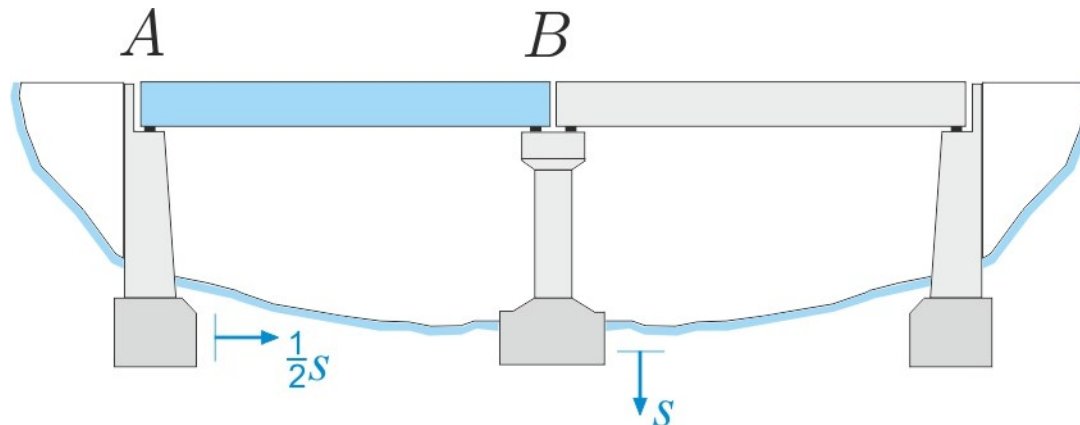
Parte I - Il modello di corpo rigido

2. Statica del corpo rigido

- **Obiettivi**
- **Modello delle forze esterne**
 - forza concentrata, momento di una forza
 - sistemi di forze
 - forze distribuite
- **I vincoli: prestazioni statiche**
- **Equazioni cardinali della statica**
- **Il problema statico**
- **Classificazione statica**
- **Esercizi** (sito: E01-E03, testo: §2.7-2.8)

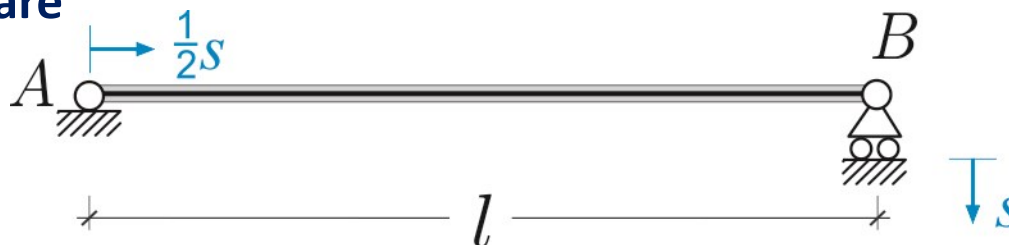
1. Cinematica del corpo rigido: problema cinematico

Esempio



Come si sposta la trave AB a seguito dei cedimenti del terreno?

Modello elementare



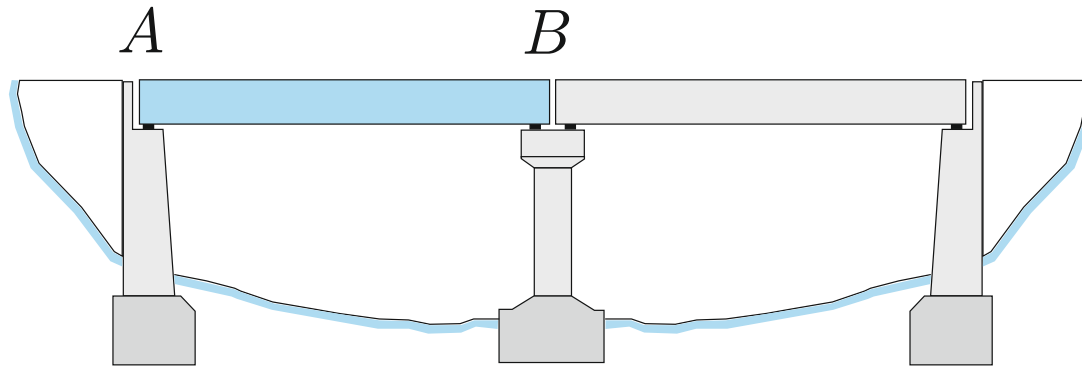
NB. I cedimenti s non sono forze ma spostamenti noti, dim $[L]$

Posizione del problema in generale

Sia dato un sistema di n_c ($n_c \geq 1$) corpi rigidi vincolati e sia C la configurazione occupata dal sistema. Supponiamo che uno o più vincoli subiscano un cedimento assegnato, il problema cinematico consiste nel determinare, *se esiste*, la nuova configurazione C' occupata dal sistema a seguito dei cedimenti

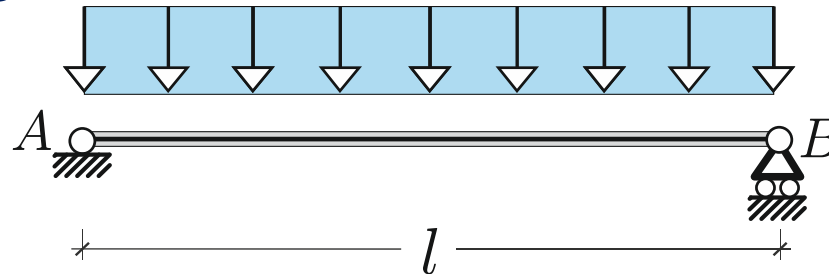
2. Statica del corpo rigido: problema statico

Esempio



*Che reazioni
devono erogare
i vincoli
affinché la
trave AB sia in
equilibrio?*

Modello elementare

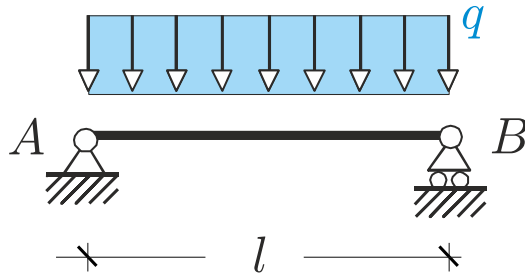


Posizione del problema in generale

Sia dato un sistema di n_c ($n_c \geq 1$) corpi rigidi vincolati soggetto ad assegnate forze esterne attive e sia C la configurazione occupata dal sistema. Il problema statico consiste nel determinare, *se esistono*, le forze esterne reattive (*reazioni vincolari*) che devono erogare i vincoli affinché il sistema sia in equilibrio.

2. Statica del corpo rigido: problema statico

Formulazione analitica



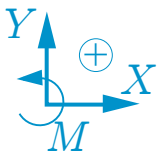
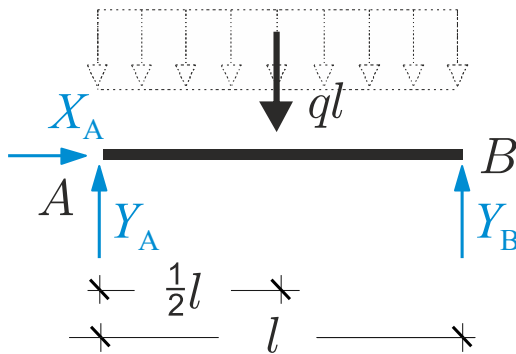
Numero di g.d.l.
 $n = 3n_c = 3$

Vincoli semplici
 $m = 2 + 1 = 3$

Esempio

La trave in figura è in equilibrio sotto un carico distribuito costante q noto, diretto come in figura. Determinare le reazioni vincolari erogate dai vincoli. Discutere l'esistenza della soluzione e il numero di soluzioni.

Dati: luce l , carico q (Ad es. $l = 2\text{m}$, $q = 1\text{ kN/m}$)

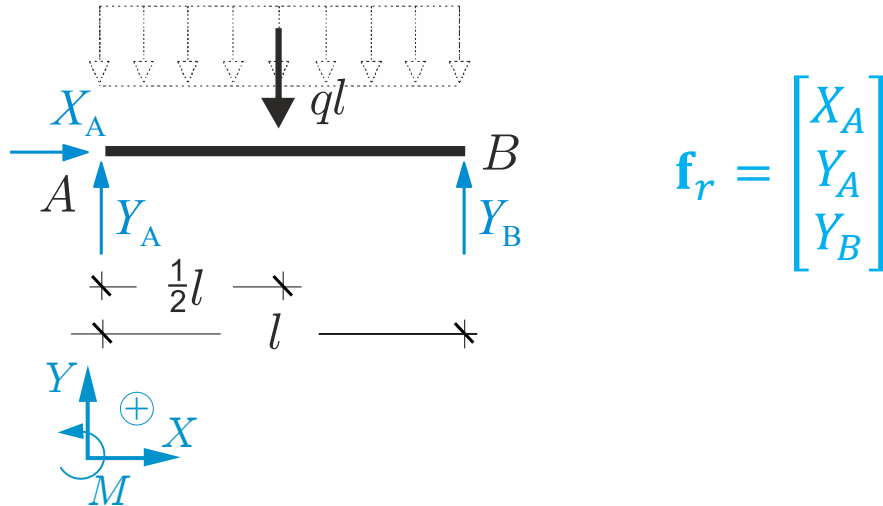


Procedura operativa

1. Si fissa un sistema di riferimento globale e le convenzioni per forze e momenti.
2. Si sostituiscono ai vincoli le reazioni vincolari (incognite) che essi sono in grado di erogare. Se sono presenti forze attive distribuite si riducono ad al sistema equivalente costituito dalla sola risultante

2. Statica del corpo rigido: problema statico

Formulazione analitica

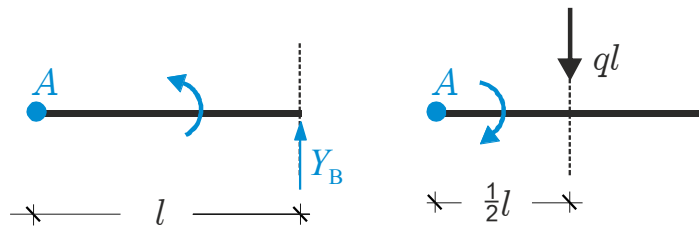


$$\mathbf{f}_r = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Y_B \end{bmatrix}$$

Procedura operativa

3. Si individuano le incognite (reazioni vincolari) eventualmente raccolte in un vettore \mathbf{f}_r
4. Si sceglie un polo rispetto al quale calcolare i momenti.

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_A = 0 \\ \dots \end{cases}$$



Procedura operativa

5. Si esplicitano le equazioni cardinali della statica in forma scalare rispettando le convenzioni scelte

2. Statica del corpo rigido: problema statico

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A + Y_B - ql = 0 \\ Y_B l - \frac{1}{2}ql^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Y_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -ql \\ -\frac{1}{2}ql^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B **f_r** **f_a** **0**

Procedura operativa

6. Si scrive il sistema precedente in forma scalare e matriciale, e si discute l'esistenza e il numero di soluzioni (Rouché-Capelli)

Numero di g.d.l $n = 3n_c = 3$ Numero di equazioni $n = 3$
 Vincoli semplici $m = 2 + 1 = 3$ Numero di incognite $m = 3$

$$\mathbf{B}\mathbf{f}_r + \mathbf{f}_a = \mathbf{0}$$

Problema cinematico sulla stessa struttura

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}s \\ 0 \\ -s \end{bmatrix}$$

A **q** **s**

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$$

Numero di g.d.l $n = 3n_c = 3$ Numero di equazioni $m = 3$
 Vincoli semplici $m = 2 + 1 = 3$ Numero di incognite $n = 3$

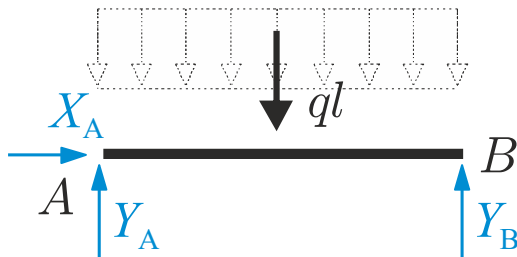
$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{s}$$

2. Statica del corpo rigido: problema statico

Soluzione

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A + Y_B - ql = 0 \\ Y_B l - ql \cdot \frac{1}{2} l = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_B = \frac{1}{2} ql \\ Y_A = \frac{1}{2} ql \end{cases}$$



Procedura operativa

7. Se la soluzione esiste ed è unica, si ricavano le reazioni vincolari incognite risolvendo il sistema.

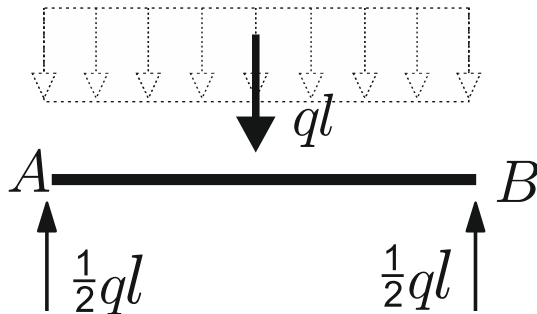


Diagramma di struttura libera

Procedura operativa

8. Si ridisegna la struttura con le reazioni vincolari note ottenute nel punto precedente ottenendo il **diagramma di struttura libera**

2. Statica del corpo rigido: problema statico

Formulazione analitica: caso generale

$$\mathbf{B}\mathbf{f}_r + \mathbf{f}_a = \mathbf{0}$$

Anche nei casi generali ci si riconduce ad un sistema algebrico costituito da **n equazioni lineari** in **m incognite**, dove m è il numero dei vincoli semplici (esterni e interni) e n il numero di gradi di libertà del sistema.

\mathbf{f}_r : vettore colonna delle reazioni vincolari (**incognito**)
($m \times 1$)

\mathbf{B} : matrice dei coefficienti del sistema detta **Matrice Statica** (nota)
($n \times m$)

\mathbf{f}_a : vettore dei termini noti detto **vettore delle forze attive** (noto)
($n \times 1$)

Numero di g.d.l: $n = 3n_c$

Numero di vincoli semplici: m

Esistenza della soluzione \mathbf{f}_r ?

Numero di soluzioni?

Classificazione Statica

2. Statica del corpo rigido: problema statico

DUALITA' STATICO-CINEMATICA

*Le due problemi cinematico e statico sono, dal punto di vista meccanico, completamente diversi. Dal punto di vista analitico sono ricondotti a sistemi di equazioni lineari con matrici dei coefficienti **A** (matrice cinematica) e **B** (matrice statica).*

Le matrici cinematica e statica dipendono esclusivamente dalla geometria della struttura e dalla disposizione/tipologia dei vincoli.

Si può dimostrare in generale che se si sceglie lo stesso polo nei due problemi, le due matrici sono una la trasposta dell'altra: hanno quindi lo stesso rango e, se quadrate, lo stesso determinante.

A: **Matrice Cinematica** matrice dei coefficienti del sistema che governa il prob. cinem.
($m \times n$)

B: **Matrice Statica** matrice dei coefficienti del sistema che governa il prob. statico
($n \times m$)

Numero di g.d.l: $n = 3n_c$

Numero di vincoli semplici: m

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$$

2. Statica del corpo rigido: classificazione statica

I. Sistemi determinati (isostatici)

$$n = m = p \quad \boxed{\mathbf{B}} \quad \det \mathbf{B} \neq 0$$

$$\exists! \mathbf{f}_r: \mathbf{f}_r = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{f}_a$$

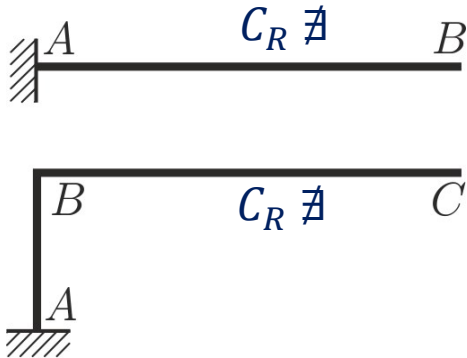
$$\mathbf{f}_a = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{f}_r = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

La soluzione esiste ed è unica (Rouché-Capelli).

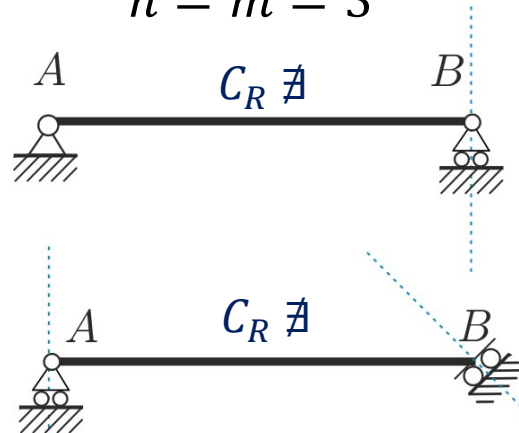
In assenza di forze esterne attive, l'unica soluzione è quella banale $\mathbf{f}_r = \mathbf{0}$: i vincoli non erogano reazioni vincolari.

Essendo $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$ i sistemi isostatici sono anche isocinematici

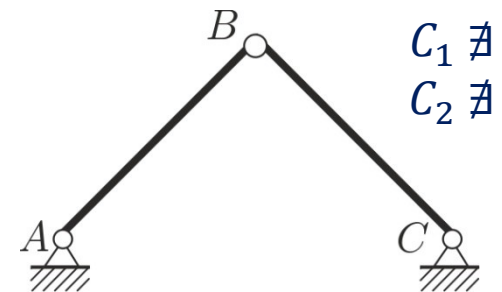
Mensola
 $n = m = 3$



Trave appoggiata
 $n = m = 3$



Arco a tre cerniere
 $n = m = 6$



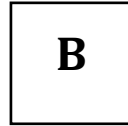
Numero di g.d.l: $n = 3n_C$

Numero di vincoli semplici: m

Rango \mathbf{B} : p

II. Sistemi degeneri (singolari)

$$n = m > p$$



$$\det \mathbf{B} = 0$$

$$\nexists \mathbf{f}_r$$

Salvo particolari distribuzioni di forze attive, **non esistono soluzioni** (Rouché-Capelli).

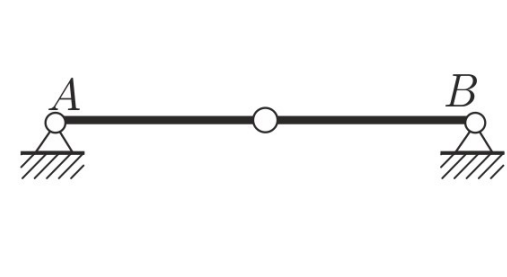
Salvo particolari distribuzioni di forze attive, in generale i vincoli non sono in grado di erogare reazioni che equilibrano le forze esterne attive.

Essendo $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$ i sistemi staticamente degeneri lo sono anche cinematicamente.

Trave appoggiata degenera
 $n = m = 3$

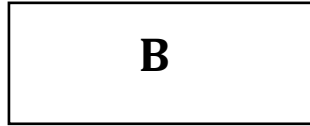


Arco a tre cerniere degenera
 $n = m = 6$



III. Sistemi staticamente indeterminati (iperstatici)

$$p = n < m$$



$$\exists \infty^{m-n} \mathbf{f}_r$$

Grado di iperstaticità $I = m - n$

Esistono ∞^{m-n} soluzioni (Rouché-Capelli).

Non è possibile determinare in modo univoco le reazioni erogate dai vincoli in condizioni di equilibrio.

Essendo $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$ i sistemi iperstatici sono anche cinematicamente impossibili

Trave incastro appoggio
 $n = 3 \quad m = 4$



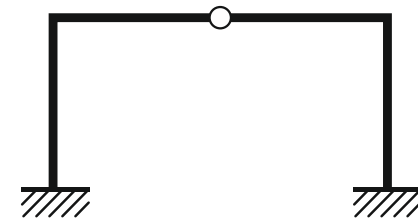
1 volta iperstatico

Trave doppiamente incastrata
 $n = 3 \quad m = 6$



3 volte iperstatico

Portale incastrato
 $n = 6 \quad m = 8$

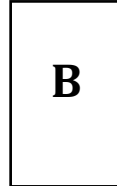


2 volte iperstatico

IV. Sistemi staticamente impossibili (labili)

$$p = m < n$$

$$\nexists \mathbf{f}_r$$



Salvo particolari distribuzioni di forze attive, **non esistono soluzioni** (Rouché-Capelli).

Salvo particolari distribuzioni di forze attive, in generale i vincoli non sono in grado di erogare reazioni che equilibrano le forze esterne attive.

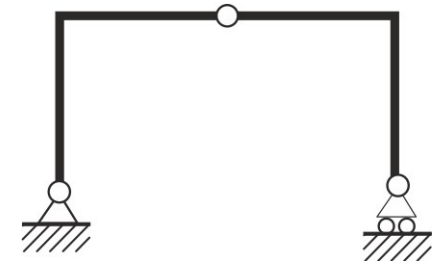
Essendo $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$ i sistemi staticamente impossibili lo sono anche cinematicamente indeterminati (labili)

$$n = 3 \quad m = 1$$



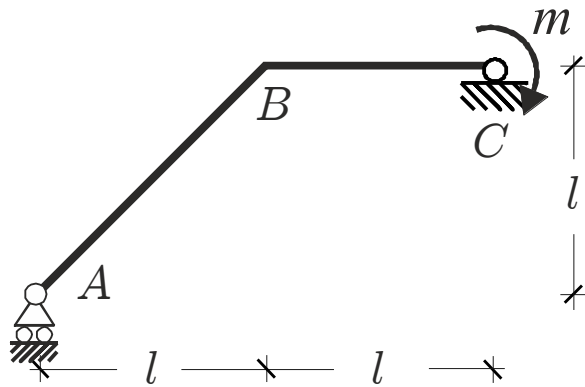
2 volte labile

$$n = 6 \quad m = 5$$



1 volta labile

Esercizio

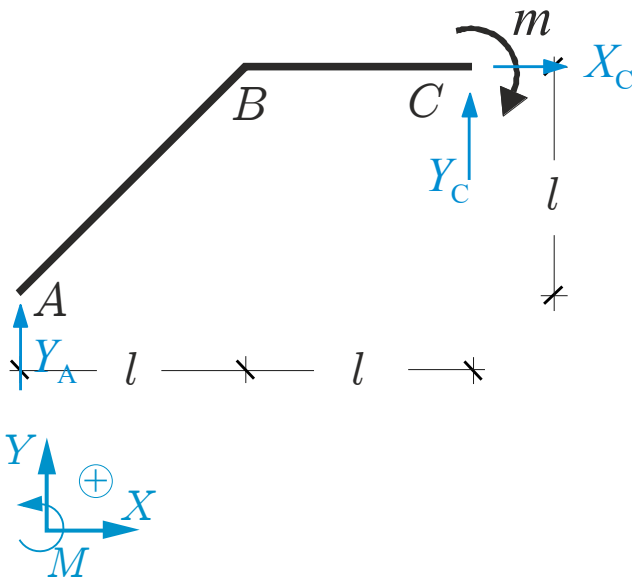


Numero di g.d.l.
 $n = 3n_c = 3$

Vincoli semplici
 $m = 2 + 1 = 3$

La struttura in figura è soggetta ad una coppia di forze m nota, diretta come in figura. Verificato che la struttura è isostatica, determinare le reazioni vincolari erogate dai vincoli.

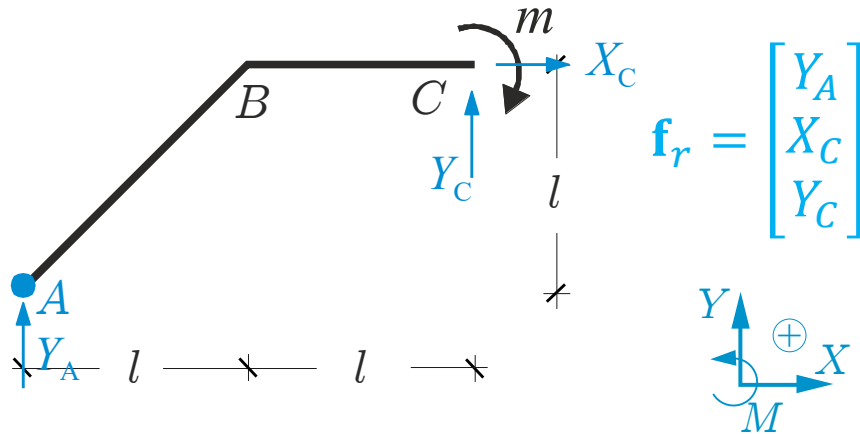
Dati: luce l , coppia m (Ad es. $l = 2\text{m}$,
 $m = 1\text{ kN} \cdot \text{m}$)



Procedura operativa

1. Si verifica l'isostaticità
2. Si fissa un sistema di riferimento globale e le convenzioni per forze e momenti.
3. Si sostituiscono ai vincoli le reazioni vincolari (incognite) che essi sono in grado di erogare. Se sono presenti forze attive distribuite si riducono ad al sistema equivalente costituito

Formulazione analitica

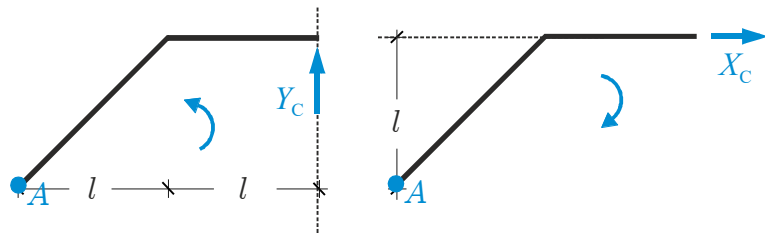


$$\mathbf{f}_r = \begin{bmatrix} Y_A \\ X_C \\ Y_C \end{bmatrix}$$

Procedura operativa

4. Si individuano le incognite (reazioni vincolari) eventualmente raccolte in un vettore \mathbf{f}_r
5. Si sceglie un polo rispetto al quale calcolare i momenti.

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_C = 0 \\ Y_A + Y_C = 0 \\ Y_C \cdot 2l - X_C \cdot l - m = 0 \end{cases}$$



Procedura operativa

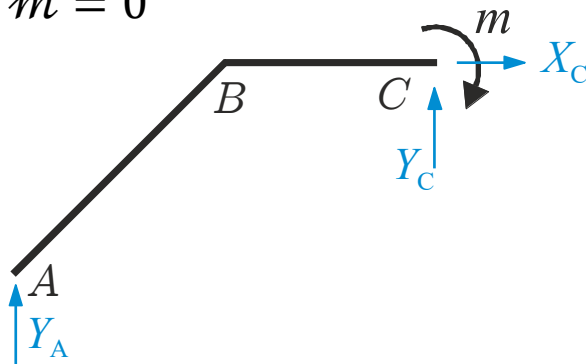
6. Si esplicitano le equazioni cardinali della statica in forma scalare rispettando le convenzioni scelte

2. Statica del corpo rigido: problema statico

Soluzione

$$\begin{cases} X_C = 0 \\ Y_A + Y_C = 0 \\ Y_C \cdot 2l - X_C \cdot l - m = 0 \end{cases}$$

$$X_C = 0 \quad Y_C = \frac{m}{2l} \quad Y_A = -\frac{m}{2l}$$



Procedura operativa

7. Se la soluzione esiste ed è unica, si ricavano le reazioni vincolari incognite risolvendo il sistema.

Procedura operativa

8. Si ridisegna la struttura con le reazioni vincolari note ottenute nel punto precedente ottenendo il **diagramma di struttura libera**

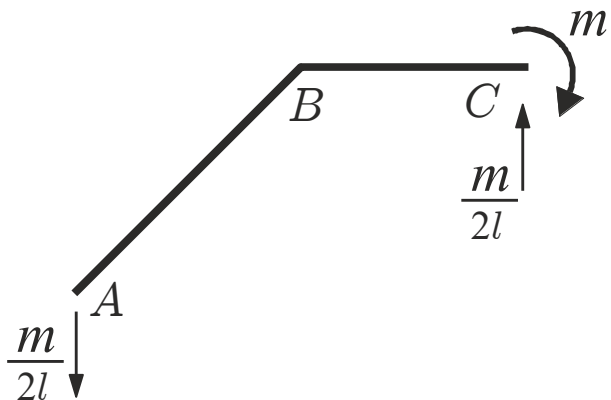


Diagramma di struttura libera



2. Statica del corpo rigido: esercizio

$$\begin{cases} X_C = 0 \\ Y_A + Y_C = 0 \\ Y_C \cdot 2l - X_C \cdot l - m = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} Y_A & X_C & Y_C \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -l & 2l \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Y_A \\ X_C \\ Y_C \end{bmatrix} & + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

B **f_r** **f_a** **0**

Procedura operativa

9. Si scrive il sistema precedente in forma scalare e matriciale, e si discute l'esistenza e il numero di soluzioni (Rouché-Capelli)

$$\mathbf{B}\mathbf{f}_r + \mathbf{f}_a = \mathbf{0}$$

Numero di g.d.l $n = 3n_c = 3$ Numero di equazioni $n = 3$
 Vincoli semplici $m = 2 + 1 = 3$ Numero di incognite $m = 3$

Problema cinematico sulla stessa struttura
 (cfr. lezioni precedenti)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -l \\ 0 & 1 & 2l \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} n = m \\ \det \mathbf{A} \neq 0 \end{matrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$$

2. Statica del corpo rigido: esercizi (lavagna)

Esercizi Per ciascuna delle strutture seguenti: a) dimostrarne l'isostaticità; b) determinare le reazioni vincolari e disegnare il diagramma di struttura libera.

