

*Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza*

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:

Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



Parte I - Il modello di corpo rigido

- Definizioni, notazioni, limiti del modello
- Sistemi di corpi rigidi
- Cinematica del corpo rigido
- **Statica del corpo rigido**



Parte I - Il modello di corpo rigido

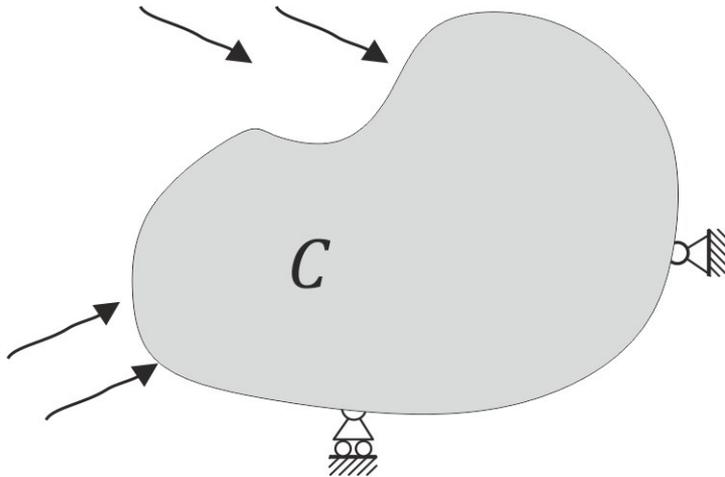
2. Statica del corpo rigido

- **Obiettivi**
- **Modello delle forze esterne**
 - forza concentrata, momento di una forza
 - sistemi di forze
 - forze distribuite
- **I vincoli: prestazioni statiche**
- **Equazioni cardinali della statica**
- **Il problema statico**
- **Classificazione statica**
- **Esercizi** (sito: E04-E06, testo: §3.6-3.8)

2. Statica del corpo rigido: obiettivi

Obiettivo 1. Assegnato un sistema di corpi rigidi vincolato, definire il modello atto a caratterizzare le **forze esterne** agenti. Le forze esterne agenti sui corpi si suddividono in due classi: *forze esterne attive* e *forze esterne reattive* o vincolari. Le forze reattive, generalmente incognite a priori, sono quelle erogate dai vincoli in risposta alle forze attive

Obiettivo 2. Definire le condizioni analitiche che devono rispettare le forze esterne (attive e reattive) affinché la configurazione occupata dal sistema sia d'**equilibrio**.



Una configurazione C si dice di *equilibrio* per un sistema se, ponendo il sistema in C con atto di moto nullo, il sistema vi permane in *quiete*

Γ^a : forze esterne attive

Γ^v : forze esterne reattive

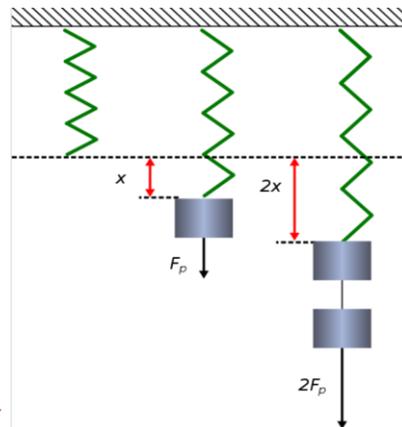
Grandezza fisica 'Forza'

Definizione. Una **forza** è una grandezza fisica vettoriale e si manifesta nell'interazione reciproca di due o più corpi. Quantifica il fenomeno di induzione di una variazione dello stato di quiete o di moto dei corpi stessi. Le forze applicate ad un dato corpo possono avere due diversi tipi di effetti:

Effetti dinamici. Assegnato un corpo di massa m non vincolato in quiete (o in moto rettilineo uniforme), *le forze sono la causa dei possibili cambiamenti dello stato di quiete o di moto di tale corpo* (variazione del vettore velocità nel tempo):

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Rightarrow \boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}} \quad \begin{array}{l} \text{Seconda legge} \\ \text{di Newton} \end{array}$$

Effetti statici. Assegnato un corpo deformabile vincolato e in quiete *le forze sono la causa dei possibili cambiamenti di forma di tale corpo* (deformazioni):



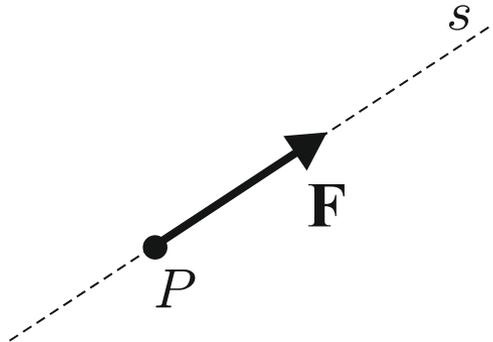
2. Statica del corpo rigido: richiami

Grandezza fisica 'Forza'

Unità di misura. L'unità di misura della forza nel S.I. è il Newton (N), definito come:

$$1 N = 1 \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

Tenendo conto del secondo principio della dinamica, possiamo quindi affermare che una forza di $1 N$ imprime ad un corpo con la massa di $1 kg$ l'accelerazione di $1 m/s^2$.



s: retta d'azione

P: punto di applicazione

$|\mathbf{F}|, F$: modulo o intensità $[F]$

Dimensioni fisiche $[F]$, unità di misura N

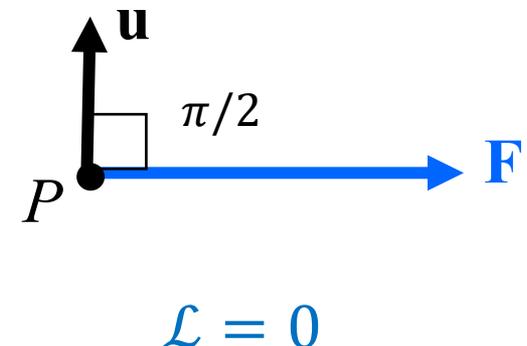
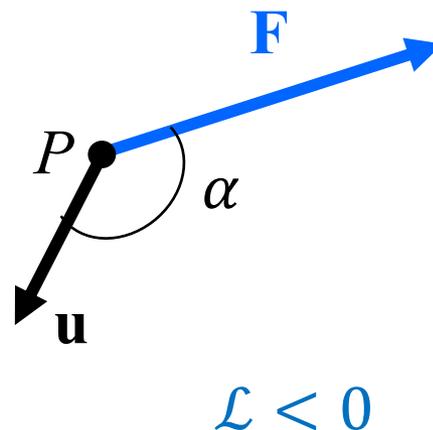
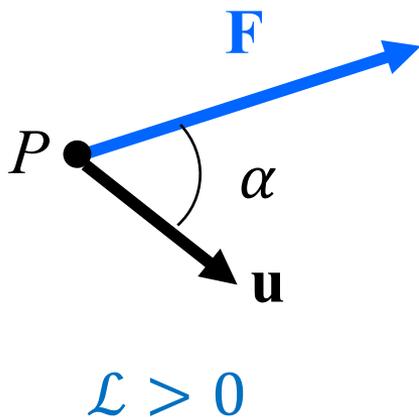
2. Statica del corpo rigido: richiami

Grandezza fisica 'Lavoro'

Definizione. Si consideri una forza \mathbf{F} applicata in un punto P ; se il punto P compie uno spostamento \mathbf{u} , si definisce *lavoro* della forza \mathbf{F} sullo spostamento \mathbf{u} il prodotto scalare dei due vettori \mathbf{F} e \mathbf{u}

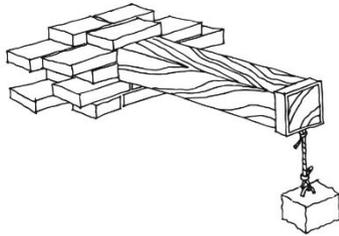
$$\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \quad \mathcal{L} = |\mathbf{F}||\mathbf{u}|\cos(\alpha)$$

- grandezza fisica scalare avente le dimensioni fisiche: $[\mathcal{L}] = [FL]$;
- il lavoro è positivo se l'angolo convesso α è acuto, negativo se è ottuso;
- il lavoro è nullo se \mathbf{F} e \mathbf{u} sono perpendicolari o se uno dei due vettori è nullo;
- se \mathbf{F} e \mathbf{u} sono paralleli, il lavoro è dato dal prodotto dei moduli dei due vettori moltiplicato per +1 o per -1 a seconda che i vettori siano concordi o discordi.

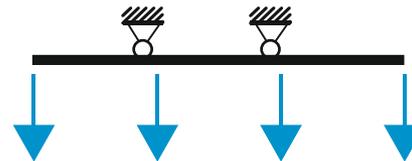


2. Statica del corpo rigido: forze esterne

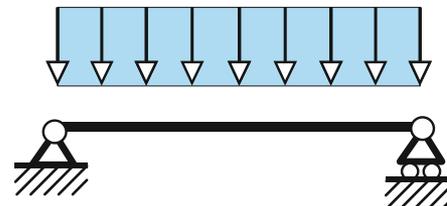
Forze concentrate



Sistemi di forze



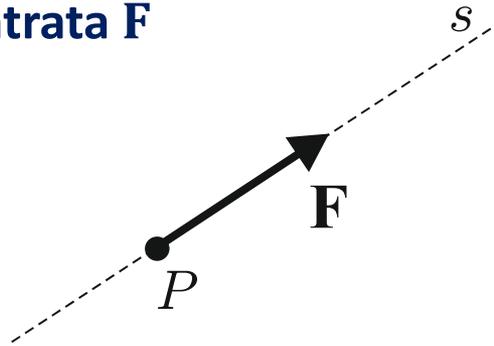
Densità di forza, forze distribuite



2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Forza concentrata \mathbf{F}

(P, \mathbf{F})



s : retta d'azione

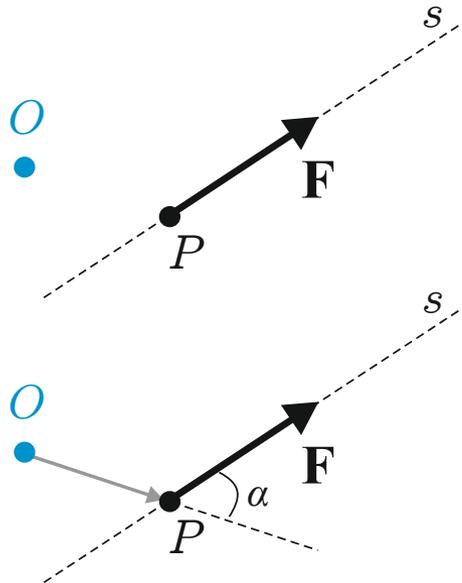
P : punto di applicazione

$|\mathbf{F}|, F$: modulo o intensità $[F]$

Dimensioni fisiche $[F]$, unità di misura N

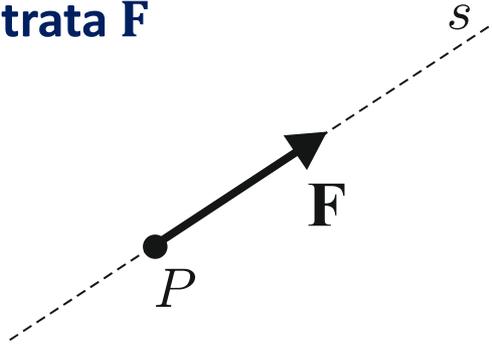
Momento di una forza rispetto ad un polo O , \mathbf{M}_O

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{F}$$



2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Forza concentrata \mathbf{F} (P, \mathbf{F})



s : retta d'azione

P : punto di applicazione

$|\mathbf{F}|, F$: modulo o intensità $[F]$

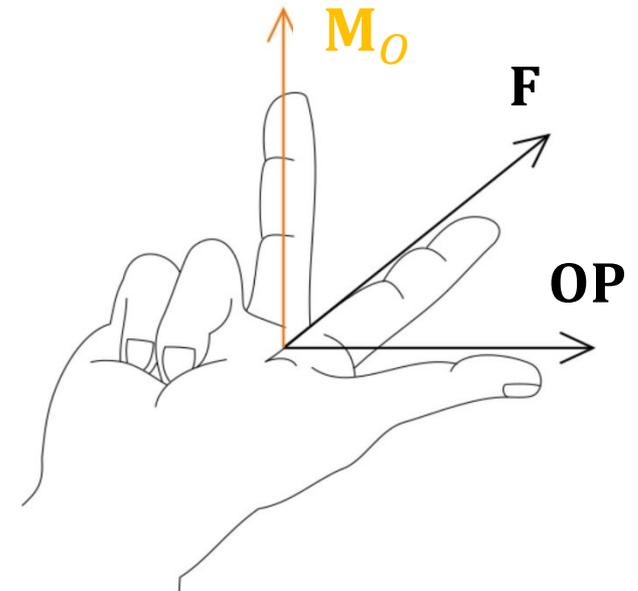
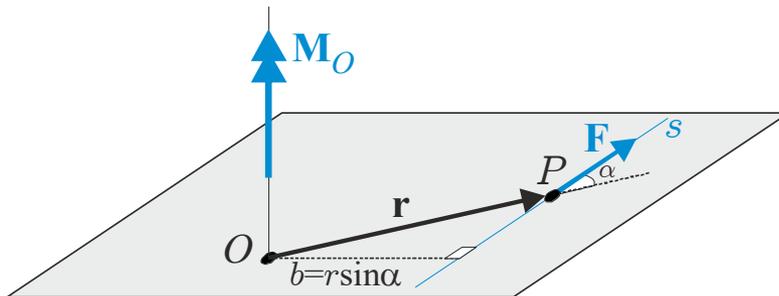
Dimensioni fisiche $[F]$, unità di misura N

Momento di una forza rispetto ad un polo O , \mathbf{M}_O

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{F}$$

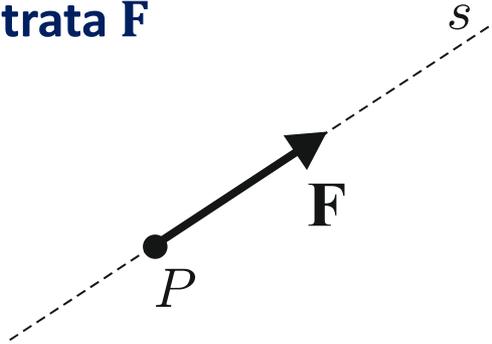
direzione: perpendicolare al piano (\mathbf{F}, \mathbf{OP})

verso: regola della mano destra



2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Forza concentrata \mathbf{F} (P, \mathbf{F})



s : retta d'azione

P : punto di applicazione

$|\mathbf{F}|, F$: modulo o intensità $[F]$

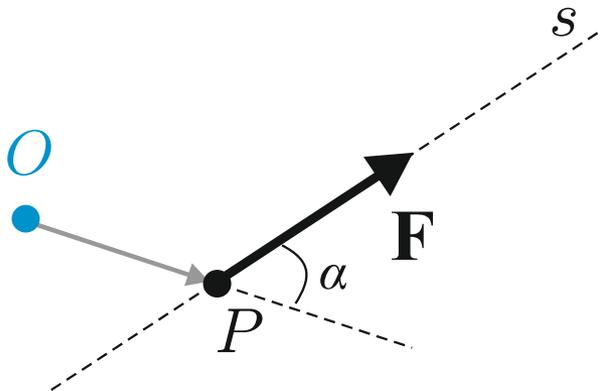
Dimensioni fisiche $[F]$, unità di misura N

Momento di una forza rispetto ad un polo O , \mathbf{M}_O

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{F}$$

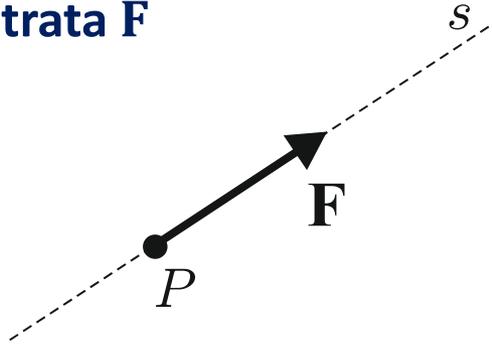
modulo o intensità: $|\mathbf{M}_O|, M_O$ $[Fl]$

$$|\mathbf{M}_O| = |\mathbf{F}| |\mathbf{OP}| \sin(\alpha)$$



2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Forza concentrata \mathbf{F} (P, \mathbf{F})



s : retta d'azione

P : punto di applicazione

$|\mathbf{F}|, F$: modulo o intensità $[F]$

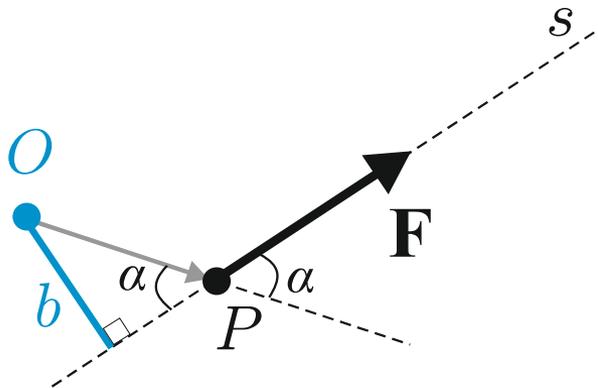
Dimensioni fisiche $[F]$, unità di misura N

Momento di una forza rispetto ad un polo O, \mathbf{M}_O

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{F}$$

modulo o intensità: $|\mathbf{M}_O|, M_O \quad [Fl]$

$$|\mathbf{M}_O| = |\mathbf{F}| |\mathbf{OP}| \sin(\alpha) = Fb$$



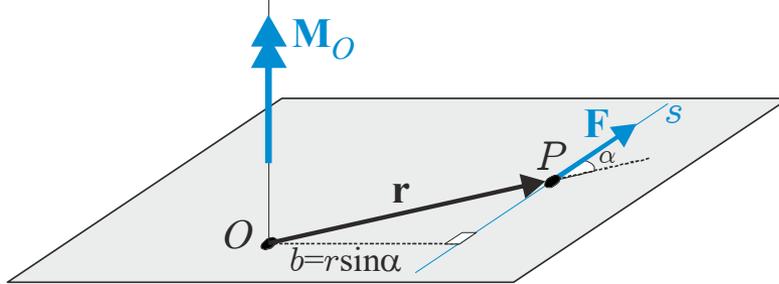
Braccio: distanza fra la retta d'azione di \mathbf{F} e il polo O

$$b = |\mathbf{OP}| \sin(\alpha)$$

Dimensioni fisiche $[Fl]$, unità di misura Nm

2. Statica del corpo rigido: forze esterne

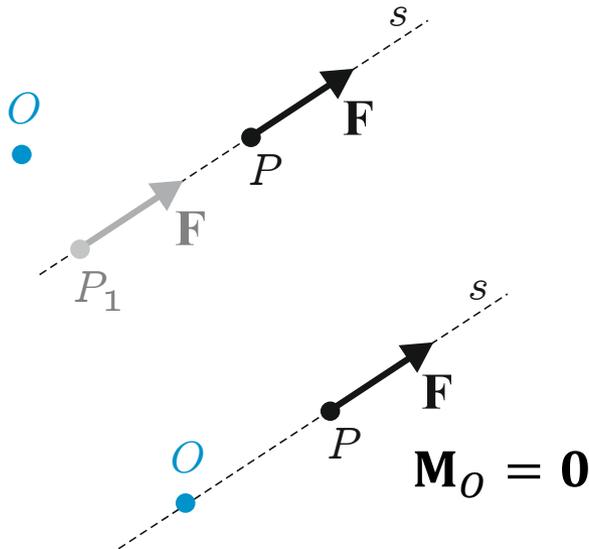
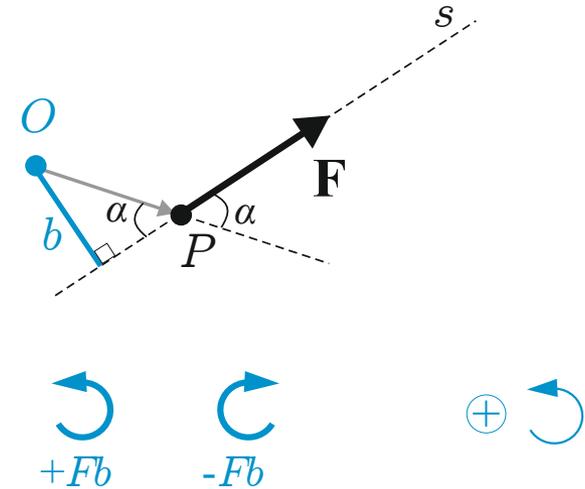
Momento di una forza



$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{F}$$

$$|\mathbf{M}_O| = |\mathbf{F}| |\mathbf{OP}| \sin(\alpha) = Fb$$

$$m = \pm Fb$$



Osservazioni

Osservazione 1:

Se il punto di applicazione P si sposta sulla retta d'azione s , il momento della forza \mathbf{F} rispetto al polo O non cambia

Osservazione 2:

Se la retta d'azione r della forza passa per il polo O il momento rispetto al polo O è nullo

2. Statica del corpo rigido: Braccio

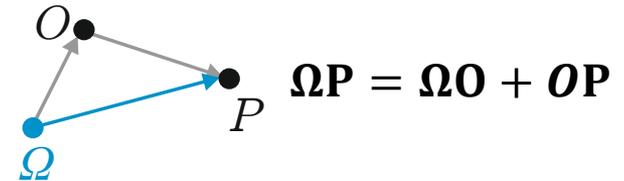
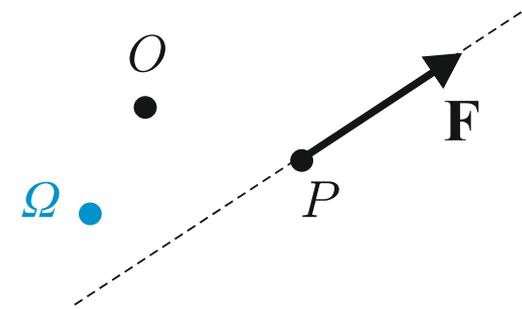
2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Momento di una forza: cambiamento del polo

Si assuma un polo Ω distinto da O :
che relazione c'è fra \mathbf{M}_Ω e \mathbf{M}_O ?

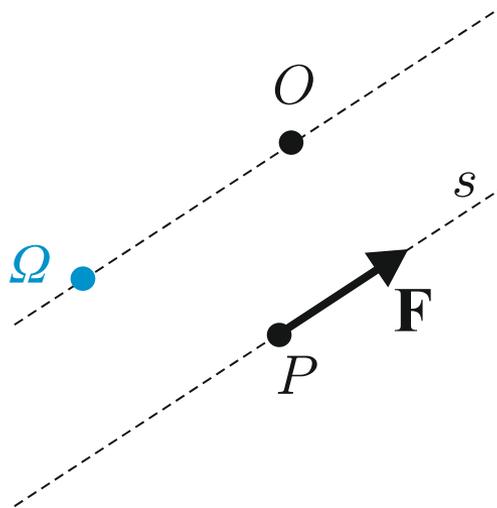
$$\mathbf{M}_\Omega = \boldsymbol{\Omega P} \times \mathbf{F} \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_\Omega = (\boldsymbol{\Omega O} + \mathbf{OP}) \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\Omega O} \times \mathbf{F} + \mathbf{OP} \times \mathbf{F}$$



$$\mathbf{M}_\Omega = \mathbf{M}_O + \boldsymbol{\Omega O} \times \mathbf{F}$$

Formula di trasporto del momento



Osservazione 3:

Se $\boldsymbol{\Omega O} // \mathbf{F}$ (cioè se Ω si trova in una retta parallela alla forza e passante per O) allora $\boldsymbol{\Omega P} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{M}_\Omega = \mathbf{M}_O$. I momenti di una forza rispetto a punti che si trovano su una retta parallela alla sua direzione sono uguali

2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Sistema di forze Γ : definizioni

$$\Gamma: (P_i, \mathbf{F}_i), i = 1, \dots, N$$

Risultante \mathbf{R}

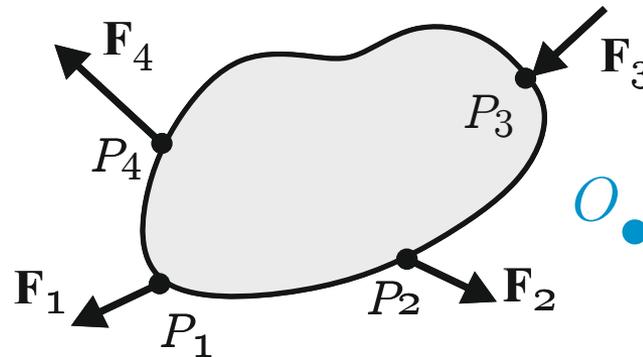
$|\mathbf{R}|, R$: modulo o intensità. Dimensioni fisiche $[F]$, unità di misura N

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_N = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i$$

Momento risultante \mathbf{M}_O

$|\mathbf{M}_O|$: modulo o intensità. Dimensioni fisiche $[FL]$, unità di misura Nm

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP}_1 \times \mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{OP}_N \times \mathbf{F}_N = \sum_{i=1}^N \mathbf{OP}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{O_i}$$



2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Momento risultante di un sistema: cambiamento del polo

Si assuma un polo Ω distinto da O : che relazione c'è fra \mathbf{M}_Ω e \mathbf{M}_O ?

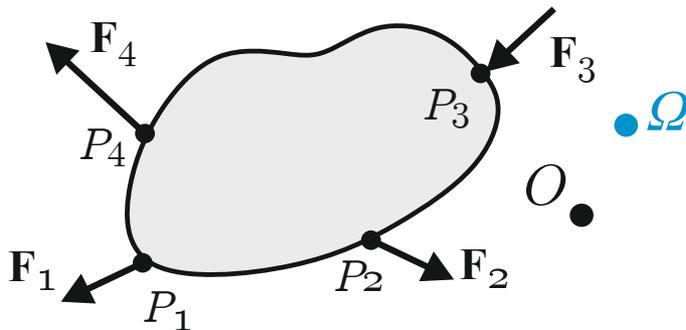
$$\mathbf{M}_\Omega = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{\Omega i} \quad \mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{O i} \quad \mathbf{M}_{\Omega i} = \mathbf{M}_{O i} + \boldsymbol{\Omega O} \times \mathbf{F}_i$$

(Formula di trasporto del momento)

$$\mathbf{M}_\Omega = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{\Omega i} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{M}_{O i} + \boldsymbol{\Omega O} \times \mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{O i} + \boldsymbol{\Omega O} \times \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i$$

$$\mathbf{M}_\Omega = \mathbf{M}_O + \boldsymbol{\Omega O} \times \mathbf{R}$$

Formula di trasporto del momento risultante



Osservazione

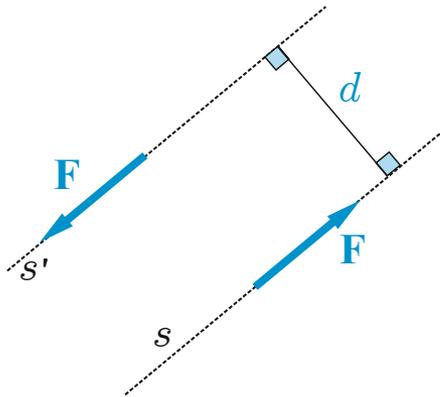
Se $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ (cioè nei sistemi a risultante nulla) allora $\mathbf{M}_\Omega = \mathbf{M}_O$ comunque si scelgano Ω e O : nei sistemi a risultante nulla il momento risultante non dipende dal polo scelto

2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Sistemi a risultante nulla: coppia di forze

Si definisce coppia di forze un sistema costituito da due forze (\mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2) che hanno: stessa direzione, stesso modulo, versi opposti; risulta quindi: $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$.

Per l'osservazione precedente: il momento risultante di una coppia di forze non dipende dal polo scelto.

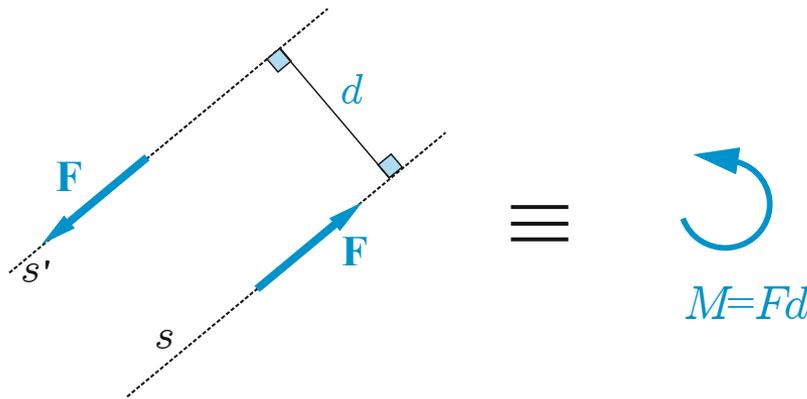


2. Statica del corpo rigido: forze esterne

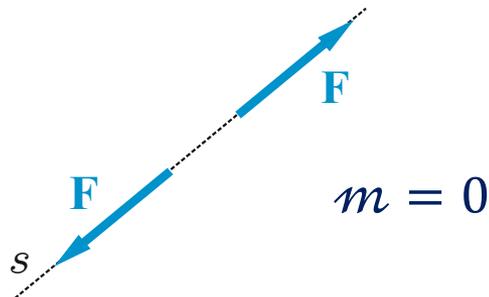
Sistemi a risultante nulla: coppia di forze

Si definisce coppia di forze un sistema costituito da due forze ($\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$) che hanno: stessa direzione, stesso modulo, versi opposti; risulta quindi: $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$.

Per l'osservazione precedente: il momento risultante di una coppia di forze non dipende dal polo scelto.



$$m = M_O = Fd$$



$$m = +Fd$$

$$m = -Fd$$

2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Sistemi staticamente equivalenti

Due sistemi distinti di forze, Γ e Γ' , si dicono staticamente equivalenti se hanno lo stesso risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo O scelto arbitrariamente

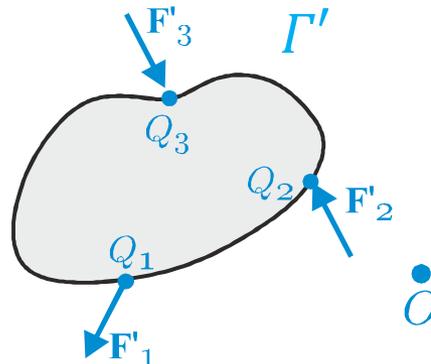
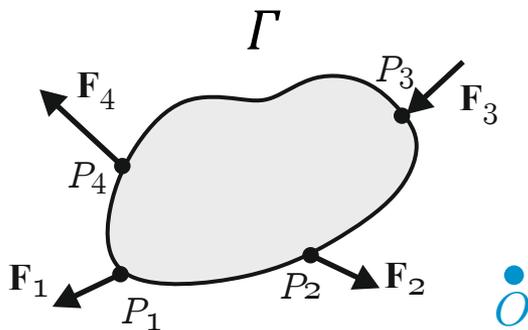
$$\Gamma: (P_i, \mathbf{F}_i), i = 1, \dots, N$$

$$\Gamma': (Q_j, \mathbf{F}'_j), j = 1, \dots, M$$

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \quad \mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{OP}_i \times \mathbf{F}_i$$

$$\mathbf{R}' = \sum_{j=1}^M \mathbf{F}'_j \quad \mathbf{M}'_O = \sum_{j=1}^M \mathbf{OQ}_j \times \mathbf{F}'_j$$

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{R}' \\ \mathbf{M}_O = \mathbf{M}'_O \end{cases}$$



Proprietà

Due sistemi staticamente equivalenti hanno sempre lo stesso momento risultante rispetto ad un qualsiasi polo comunque scelto

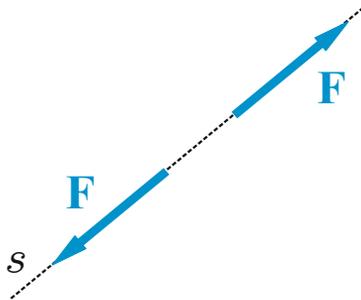
2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Sistemi nulli o equivalenti a 0

Un sistema di forze si dice nullo o equivalente a 0 se ha nulli risultante e momento risultante rispetto ad un polo O scelto arbitrariamente

$$\Gamma_{\#}: (P_i, \mathbf{F}_i), i = 1, \dots, N$$

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \end{cases}$$



Proprietà

Il momento risultante di un sistema equivalente a 0 è sempre nullo, comunque si scelga il polo.

2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Sistemi staticamente equilibrati

Due sistemi distinti di forze, Γ e Γ' , si dicono staticamente equilibrati se hanno uguali e opposti risultante e momento risultante rispetto ad un polo O scelto arbitrariamente

$$\Gamma: (P_i, \mathbf{F}_i), i = 1, \dots, N$$

$$\Gamma': (Q_j, \mathbf{F}'_j), j = 1, \dots, M$$

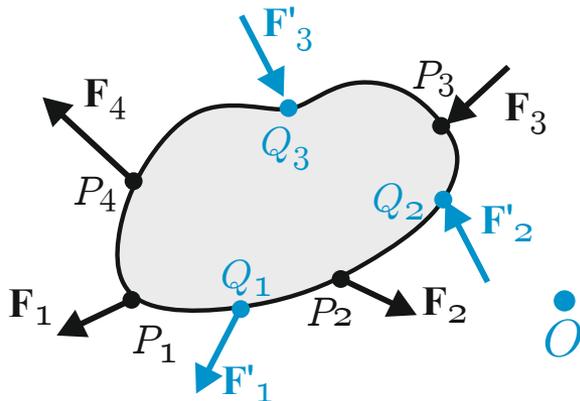
$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \quad \mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{OP}_i \times \mathbf{F}_i$$

$$\mathbf{R}' = \sum_{j=1}^M \mathbf{F}'_j \quad \mathbf{M}'_O = \sum_{j=1}^M \mathbf{OQ}_j \times \mathbf{F}'_j$$

$$\begin{cases} \mathbf{R} = -\mathbf{R}' \\ \mathbf{M}_O = -\mathbf{M}'_O \end{cases}$$



$$\begin{cases} \mathbf{R} + \mathbf{R}' = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O + \mathbf{M}'_O = \mathbf{0} \end{cases}$$



Proprietà

Se Γ e Γ' sono due sistemi equilibrati, allora il sistema $\Gamma \cup \Gamma'$ è un sistema nullo

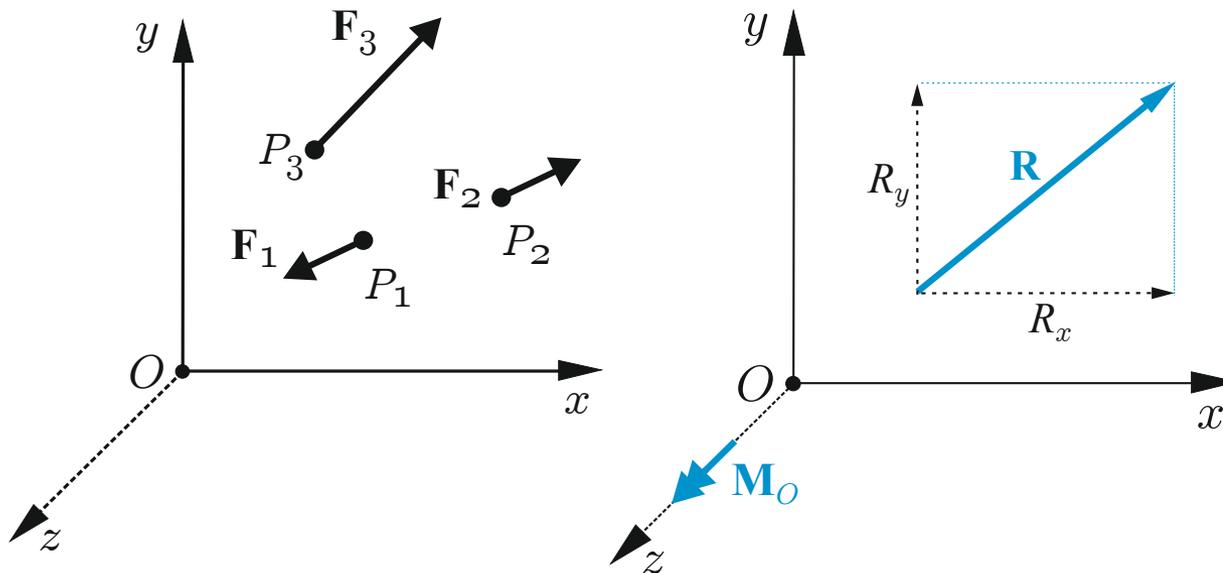
2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Sistemi piani di forze

Un sistema di forze si dice piano se tutti i vettori forza sono paralleli ad uno stesso piano π . Rispetto ad un polo O scelto sul piano π , i vettori momento delle forze sono tutti paralleli e perpendicolari a π .

Componenti cartesiane

Scelto un sistema cartesiano in cui il piano coordinato xy coincide con π , si ha per il risultante e il vettore risultante



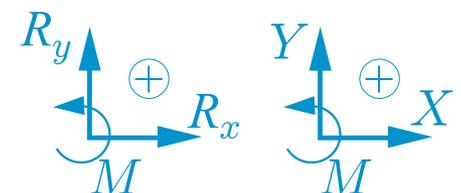
$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$$

$$\mathbf{M}_O = M_O \mathbf{k}$$

Coppia di forze nel piano

$$\mathbf{M} = m \mathbf{k}$$

Convenzioni



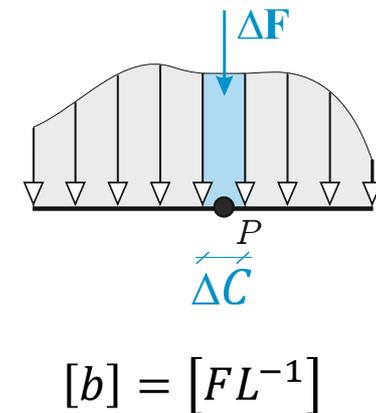
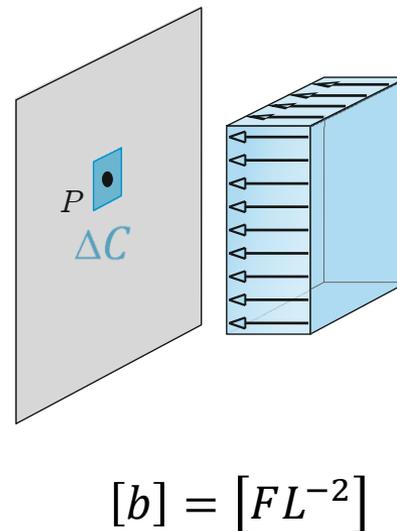
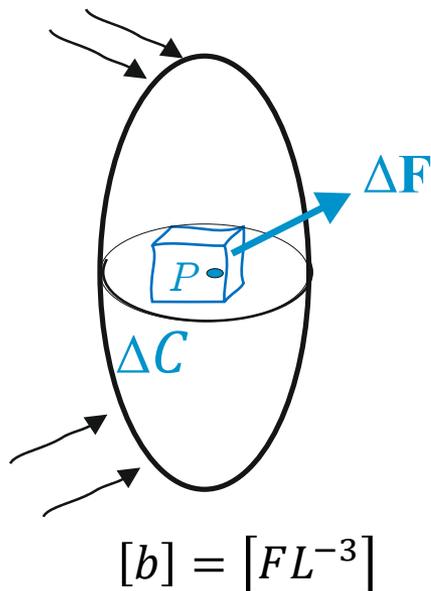
2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Densità di forza

Spesso le forze esterne agiscono su una porzione finita del corpo o su ogni punto dell'intero corpo/sistema di corpi. Es: forza di gravità, pressione di un fluido su una parete etc. Per modellare questo tipo di azione si introduce il vettore densità di forza $\mathbf{b}(P)$

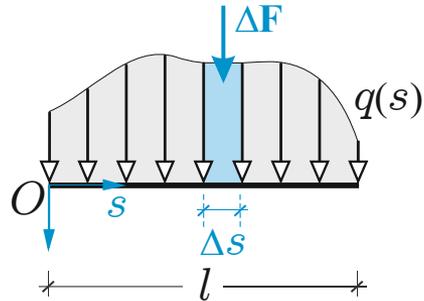
$$\mathbf{b}(P) = \lim_{\Delta C \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta C}$$

dove ΔC è un intorno (di volume, di superficie o di linea) finito del punto P , $\Delta \mathbf{F}$ è la risultante delle forze agenti su tale intorno.

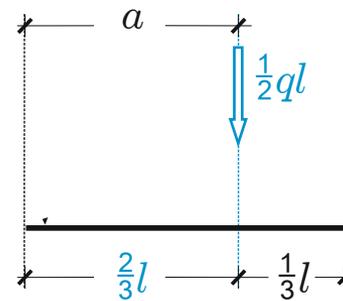
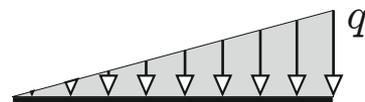
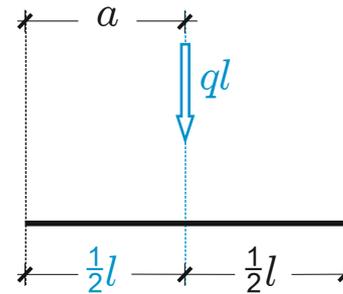
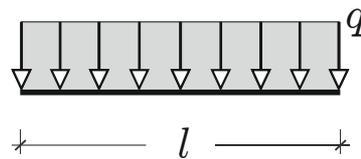


2. Statica del corpo rigido: forze esterne

Densità di forza per unità di linea



$$\mathbf{b}(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta s}$$

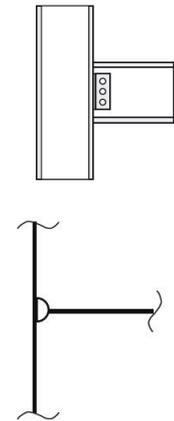
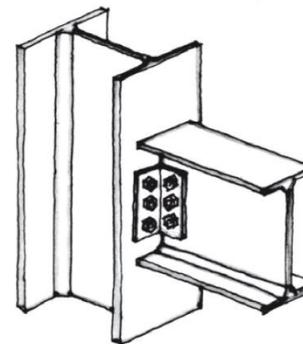
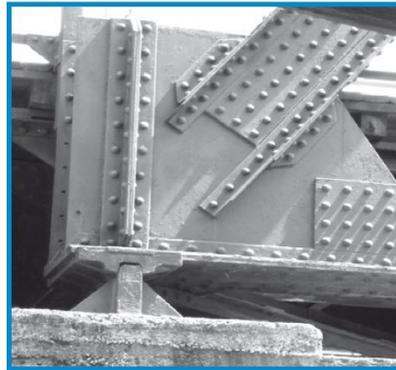


2. Statica del corpo rigido: i vincoli

Definizioni. Gli elementi strutturali devono essere collegati fra di loro e con gli elementi fissi esterni alla struttura (*suolo*). I dispositivi di connessione che realizzano ciò sono detti *vincoli*. I vincoli che collegano gli elementi strutturali con il suolo sono detti **esterni**, i vincoli che collegano due elementi della stessa struttura sono detti **interni**.

Modello dei vincoli. I vincoli sono modellati assimilandoli a dispositivi ideali che presentano le seguenti caratteristiche: sono *puntiformi*, *lisci* (privi di attrito) e *bilaterali*. Si ammetterà inoltre valida l'*ipotesi dei piccoli spostamenti*.

Prestazioni statiche. Dal punto di vista statico i vincoli sono in grado di erogare delle forze e/o coppie di forze nei punti dei corpi cui sono applicati (Postulato di Kirchhoff); si tratta di forze esterne reattive chiamate anche **reazioni vincolari**.



1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

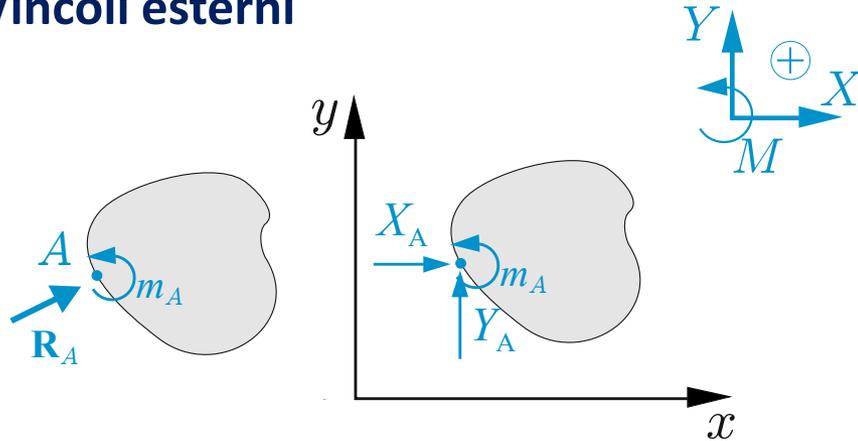
Molteplicità statica m . Analiticamente le prescrizioni statiche dei vincoli si traducono in forze concentrate e/o coppie: si definisce **molteplicità statica** del vincolo il numero m di componenti scalari indipendenti delle reazioni vincolari che il vincolo è in grado di erogare. Come si vedrà, molteplicità statica e cinematica m coincidono.

Tipologie ideali di vincolo. In base al tipo di prescrizioni statiche e alla molteplicità m si possono distinguere le stesse tipologie di vincolo (esterni o interni) viste in cinematica, ad esempio:

- Pendolo o biella, $m = 1$ (vincolo semplice)
- Carrello, $m = 1$ (vincolo semplice)
- Cerniera, $m = 2$ (vincolo doppio)
- Glifo o doppio pendolo, $m = 2$ (vincolo doppio)
- Incastro, $m = 3$ (vincolo triplo)

2. Statica del corpo rigido: i vincoli

Vincoli esterni



Un vincolo esterno applicato in un punto A del corpo può imporre una forza concentrata \mathbf{R}_A nel punto A in cui è applicato e una coppia di forze \mathbf{M}_A

Nel piano:

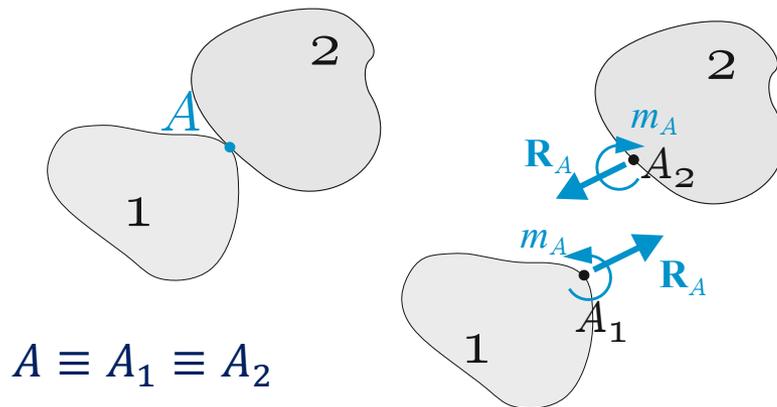
$$\mathbf{R}_A = X_A \mathbf{i} + Y_A \mathbf{j} \quad \mathbf{M}_A = m_A \mathbf{k}$$

Reazioni vincolari scalari:

$$X_A, Y_A, m_A$$

(Il pedice A indica il punto in cui è applicato il vincolo)

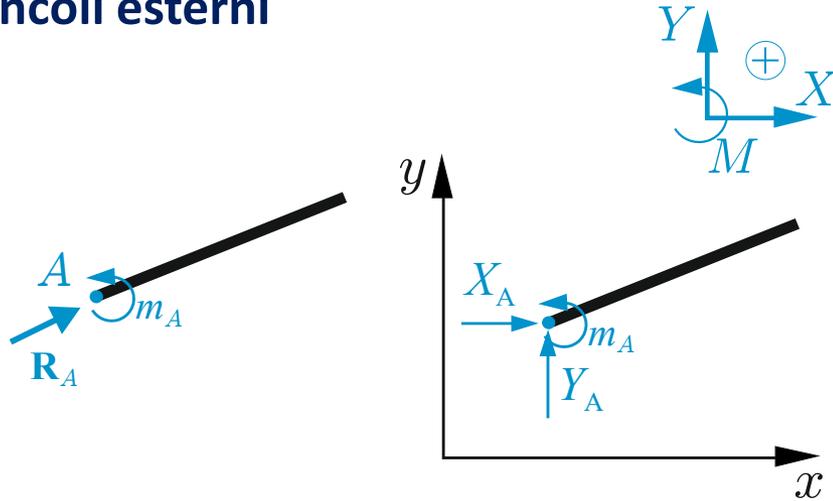
Vincoli interni fra due corpi



Un vincolo interno applicato in un punto $A \equiv A_1 \equiv A_2$ di due corpi può imporre forze e/o coppie in A_1 e forze e/o coppie uguali e opposte in A_2 (principio di azione e reazione)

2. Statica del corpo rigido: i vincoli

Vincoli esterni



Un vincolo esterno applicato in un punto A del corpo può imporre una forza concentrata \mathbf{R}_A nel punto A in cui è applicato e una coppia di forze \mathbf{M}_A

Nel piano:

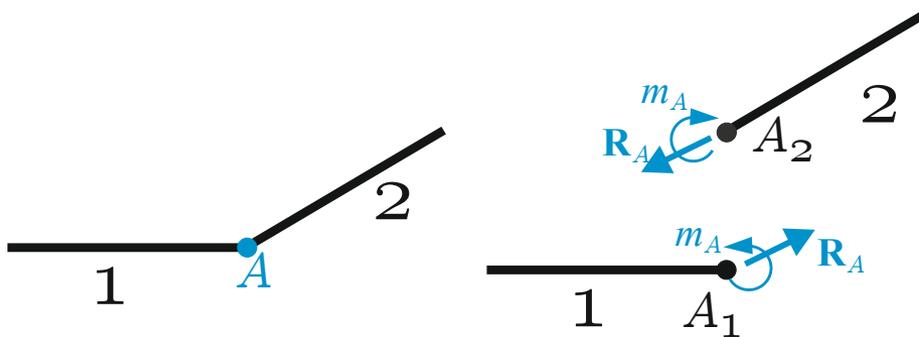
$$\mathbf{R}_A = X_A \mathbf{i} + Y_A \mathbf{j} \quad \mathbf{M}_A = m_A \mathbf{k}$$

Reazioni vincolari scalari:

$$X_A, Y_A, m_A$$

(Il pedice A indica il punto in cui è applicato il vincolo)

Vincoli interni fra due corpi

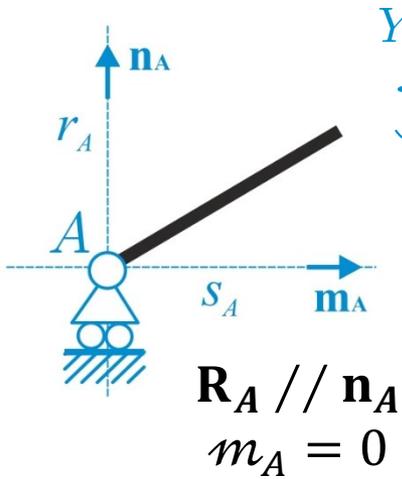


$$A \equiv A_1 \equiv A_2$$

Un vincolo interno applicato in un punto $A \equiv A_1 \equiv A_2$ di due corpi può imporre forze e/o coppie in A_1 e forze e/o coppie uguali e opposte in A_2 (principio di azione e reazione)

2. Statica del corpo rigido: i vincoli

Carrello esterno



Può erogare in A una forza di modulo e verso qualsiasi, ma parallela all'asse r_A



$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A \neq 0 \\ m_A = 0 \end{cases}$$

$m = 1$

Prestazioni statiche

$$\begin{cases} u_A \neq 0 \\ v_A = 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases}$$

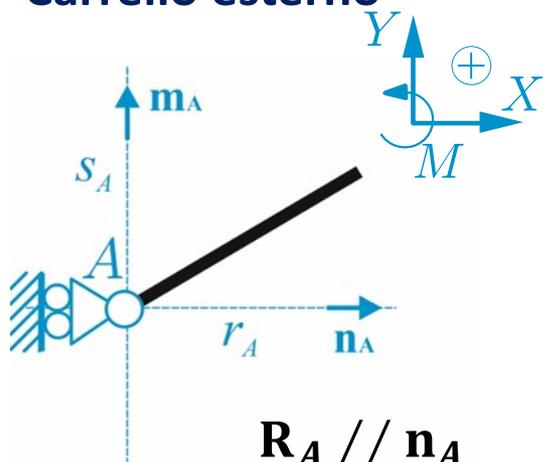
$m = 1$

Prestazioni cinematiche

$$X_A u_A + Y_A v_A + m_A \theta = 0$$

2. Statica del corpo rigido: i vincoli

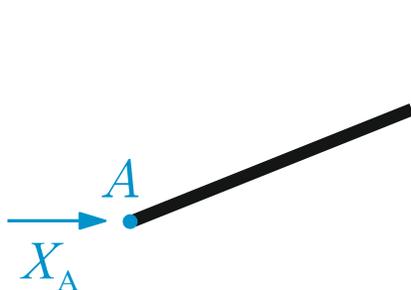
Carrello esterno



$$\mathbf{R}_A // \mathbf{n}_A$$

$$m_A = 0$$

Può erogare in A una forza di modulo e verso qualsiasi, ma parallela all'asse r_A



$$\begin{cases} X_A \neq 0 \\ Y_A = 0 \\ m_A = 0 \end{cases}$$

$$m = 1$$

Prestazioni statiche

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A \neq 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases}$$

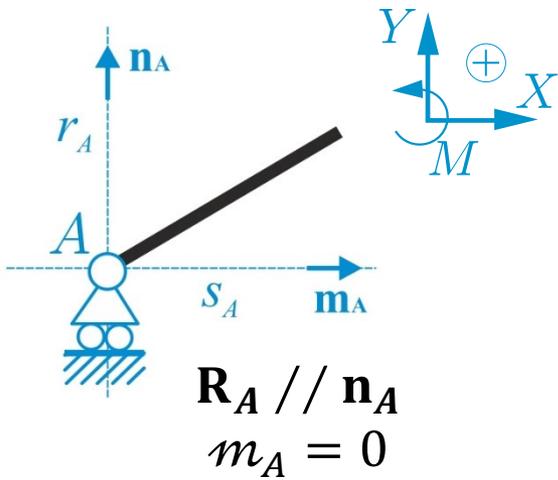
$$m = 1$$

Prestazioni cinematiche

$$X_A u_A + Y_A v_A + m_A \theta = 0$$

2. Statica del corpo rigido: i vincoli

Carrello esterno



Può erogare in A una forza di modulo e verso qualsiasi, ma parallela all'asse r_A

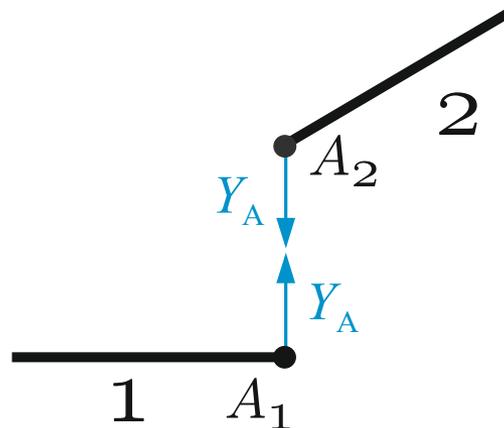
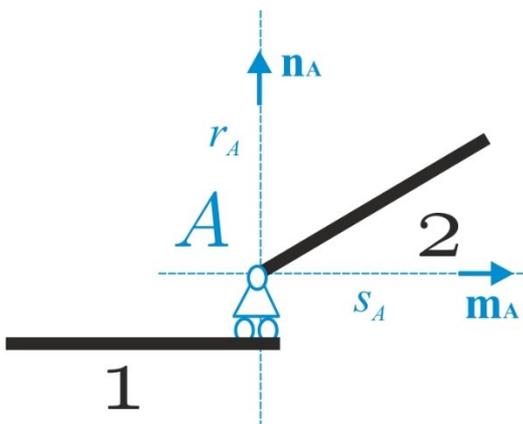


$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A \neq 0 \\ m_A = 0 \end{cases}$$

$$m = 1$$

Prestazioni statiche

Carrello interno



Reazioni vincolari
indipendenti: 1

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A \neq 0 \\ m_A = 0 \end{cases}$$

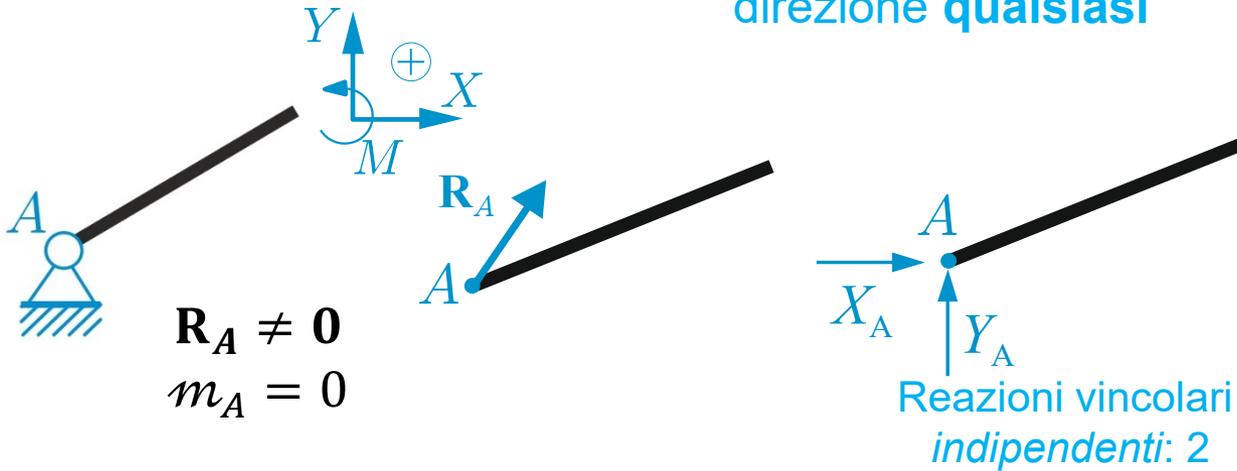
$$m = 1$$

Prestazioni statiche

2. Statica del corpo rigido: i vincoli

Cerniera esterna

Può erogare in A una forza di modulo, verso e direzione qualsiasi

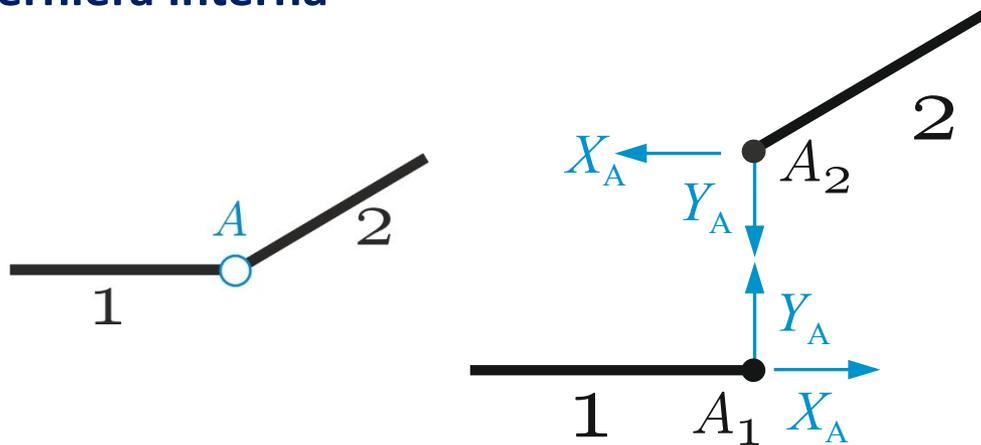


$$\begin{cases} X_A \neq 0 \\ Y_A \neq 0 \\ m_A = 0 \end{cases}$$

$$m = 2$$

Prestazioni statiche

Cerniera interna



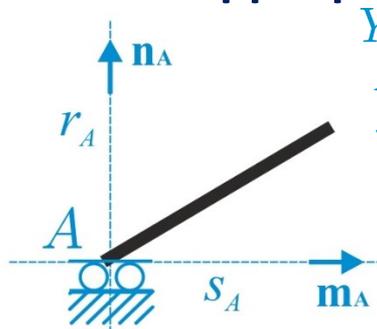
$$\begin{cases} X_A \neq 0 \\ Y_A \neq 0 \\ m_A = 0 \end{cases}$$

$$m = 2$$

Prestazioni statiche

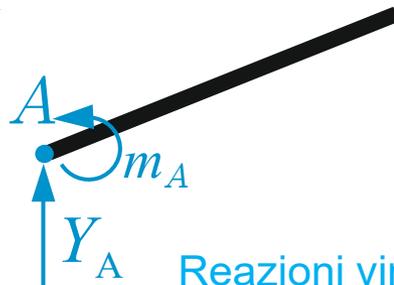
2. Statica del corpo rigido: i vincoli

Glifo o doppio pendolo esterno



$$\mathbf{R}_A // \mathbf{n}_A$$

$$m_A \neq 0$$



Reazioni vincolari
indipendenti: 2

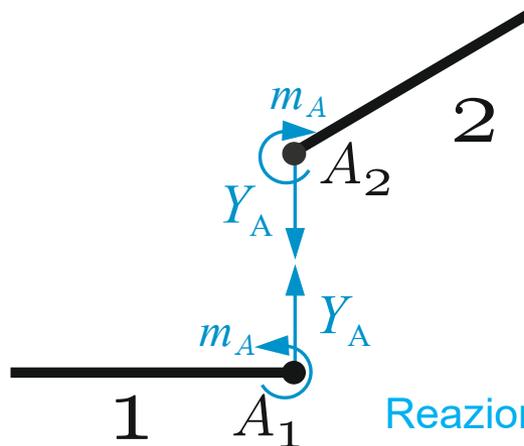
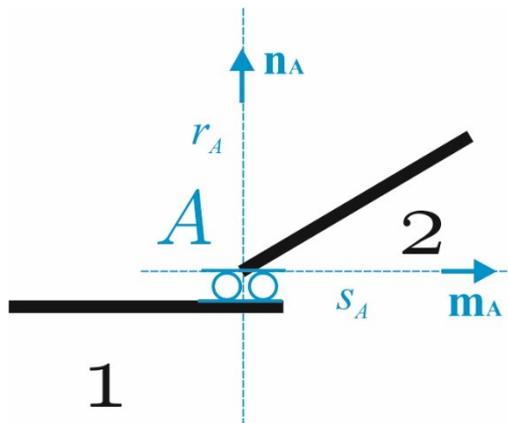
Può erogare in A una coppia e una forza di modulo e verso qualsiasi, ma parallela all'asse r_A

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A \neq 0 \\ m_A \neq 0 \end{cases}$$

$$m = 2$$

Prestazioni statiche

Glifo o doppio pendolo interno



Reazioni vincolari
indipendenti: 2

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A \neq 0 \\ m_A \neq 0 \end{cases}$$

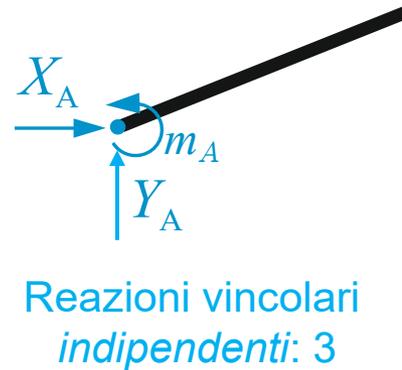
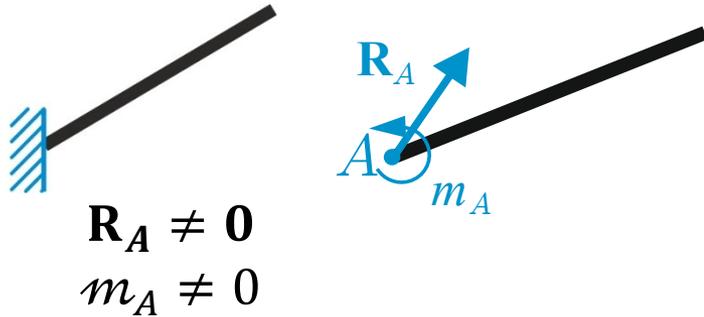
$$m = 2$$

Prestazioni statiche

2. Statica del corpo rigido: i vincoli

Incastro esterno

Può erogare in A una forza di modulo, verso e direzione **qualsiasi**

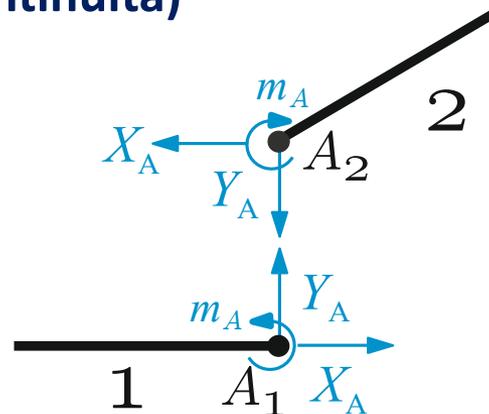


$$\begin{cases} X_A \neq 0 \\ Y_A \neq 0 \\ m_A \neq 0 \end{cases}$$

$m = 3$

Prestazioni statiche

Incastro interno (vincolo di continuità)



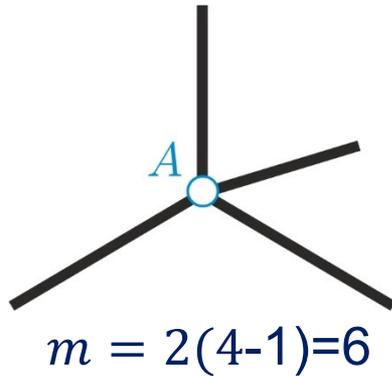
$$\begin{cases} X_A \neq 0 \\ Y_A \neq 0 \\ m_A \neq 0 \end{cases}$$

$m = 3$

Prestazioni statiche

2. Statica del corpo rigido: i vincoli

Vincoli interni che connettono più di due corpi



Molteplicità

$$m = n_V(n_C - 1)$$

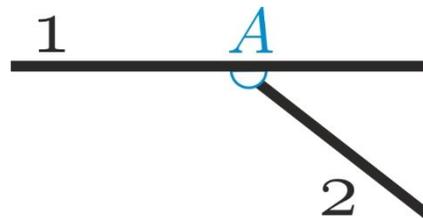
Rappresentazione grafica

$m = 2$



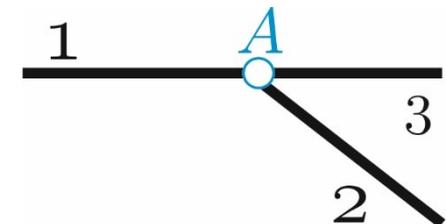
*Cerniera che collega
due travi alle estremità*

$m = 2$



*Cerniera che collega
due travi non alle estremità*

$m = 4$



*Cerniera che collega
tre travi alle estremità*

2. Statica del corpo rigido: equazioni cardinali

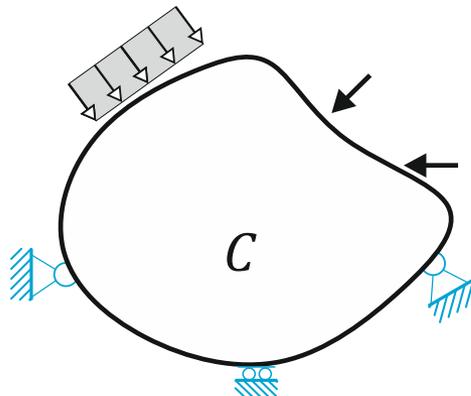
Equazioni cardinali della statica ($n_C = 1$)

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo rigido sia in equilibrio sotto assegnate forze esterne attive e reattive è che il sistema di tali forze esterne sia nullo (cioè sia nullo il risultante e il momento risultante rispetto ad un polo O scelto arbitrariamente)

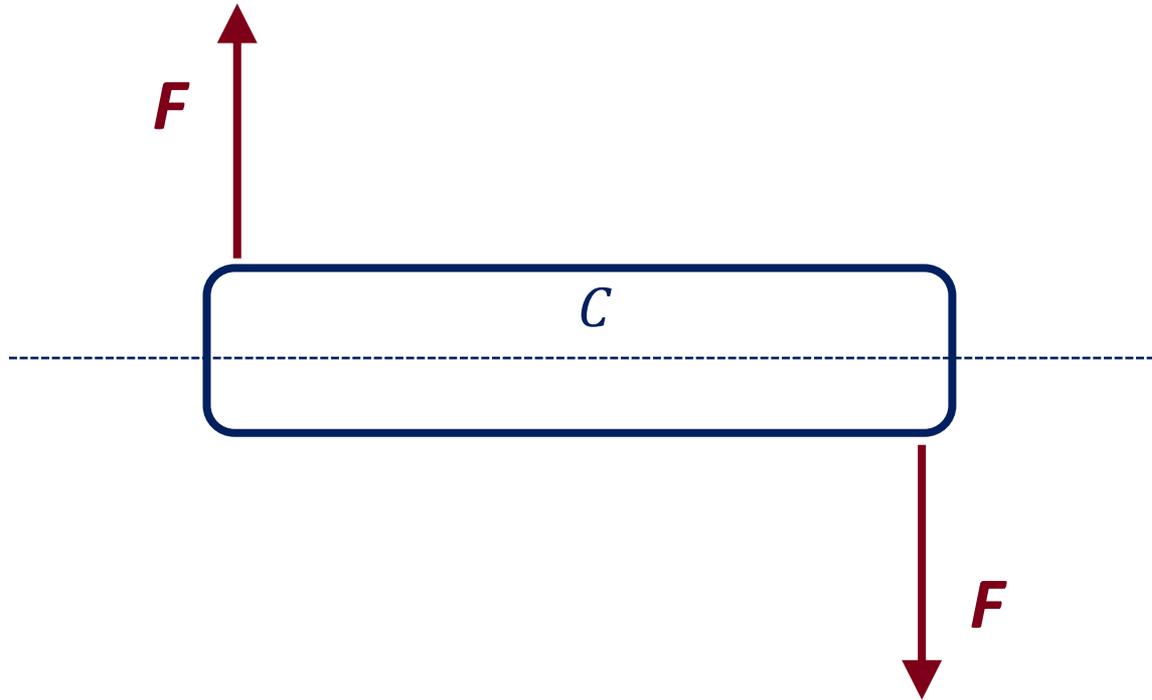
$$\begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Equazioni cardinali della statica} \\ \text{(forma vettoriale)} \end{array}$$

Γ^e : forze esterne (\mathbf{R}, \mathbf{M}_O) Γ^a : forze esterne attive ($\mathbf{R}^a, \mathbf{M}_O^a$) Γ^v : forze esterne reattive ($\mathbf{R}^v, \mathbf{M}_O^v$)

$$\Gamma^e = \Gamma^a \cup \Gamma^v \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{R}^a + \mathbf{R}^v = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O^a + \mathbf{M}_O^v = \mathbf{0} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Equazioni cardinali della statica} \\ \text{(forma vettoriale)} \end{array}$$

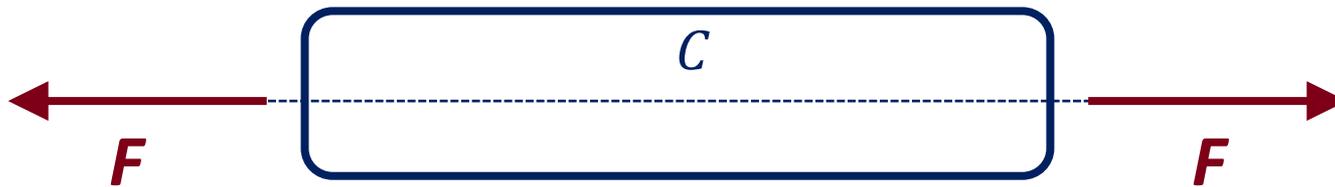


2. Statica del corpo rigido: equazioni cardinali



$$\begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad C \text{ non è una configurazione di equilibrio}$$

2. Statica del corpo rigido: equazioni cardinali

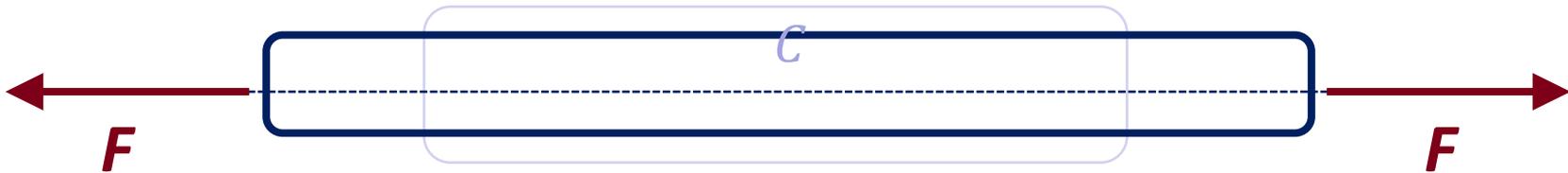


$$\begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \end{cases}$$

2. Statica del corpo rigido: equazioni cardinali

Osservazione

*Se il corpo è deformabile la condizione che il sistema delle forze esterne sia nullo in genere è necessaria ma **non sufficiente** per l'equilibrio del corpo*



$$\begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \end{cases}$$

2. Statica del corpo rigido: equazioni cardinali

Equazioni cardinali della statica ($n_C = 1$)

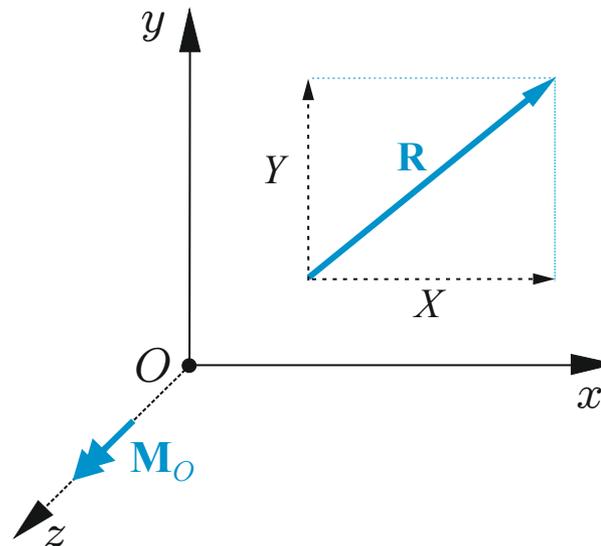
$$\begin{cases} \mathbf{R}^a + \mathbf{R}^v = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O^a + \mathbf{M}_O^v = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\mathbf{R}^a = X^a \mathbf{i} + Y^a \mathbf{j} \quad \mathbf{M}_O^a = \mathcal{M}_O^a \mathbf{k}$$

$$\mathbf{R}^v = X^v \mathbf{i} + Y^v \mathbf{j} \quad \mathbf{M}_O^v = \mathcal{M}_O^v \mathbf{k}$$

$$\begin{cases} X^a + X^v = 0 \\ Y^a + Y^v = 0 \\ \mathcal{M}_O^a + \mathcal{M}_O^v = 0 \end{cases}$$

*Equazioni cardinali della statica
(forma scalare)*



2. Statica del corpo rigido: equazioni cardinali

Equazioni cardinali della statica ($n_C > 1$)

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di n_C corpi rigidi sia in equilibrio sotto assegnate forze esterne attive e reattive è che il sistema delle forze esterne agenti su ciascun corpo sia nullo

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{Oi} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{Oi} = \mathbf{0} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n_C \quad \begin{array}{l} \text{Equazioni cardinali della statica} \\ \text{(forma vettoriale)} \end{array}$$

$$\begin{cases} X_i^a + X_i^v = 0 \\ Y_i^a + Y_i^v = 0 \\ \mathcal{M}_{Oi}^a + \mathcal{M}_{Oi}^v = 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, n_C \quad \begin{array}{l} \text{Equazioni cardinali della statica} \\ \text{(forma scalare)} \end{array}$$

