

*Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza*

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:

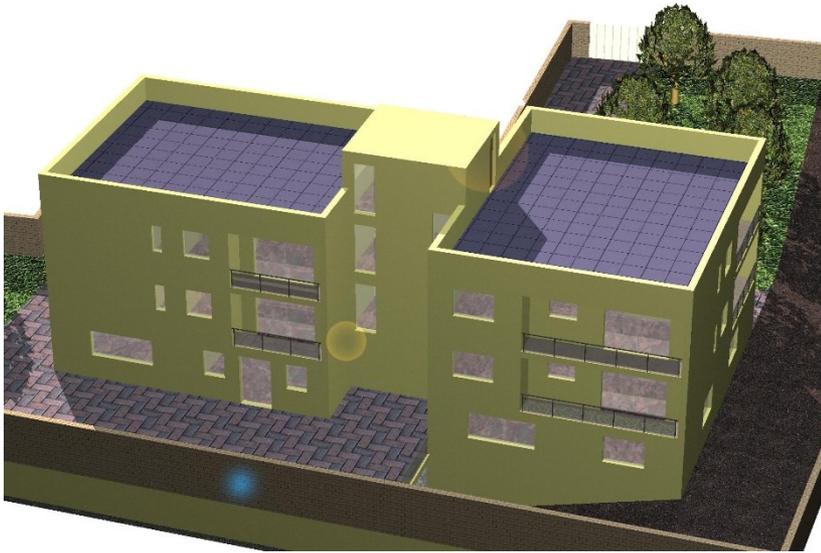
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



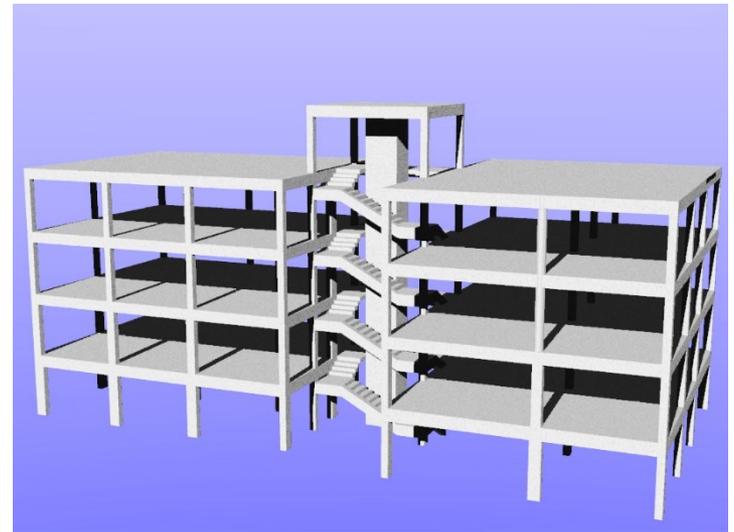
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

2.1 Parole chiave

Struttura portante: insieme degli elementi strutturali e dei vincoli: ha il compito di rispondere alle azioni esterne in modo che la costruzione nel suo complesso possa svolgere in modo adeguato le funzioni per le quali è stata realizzata



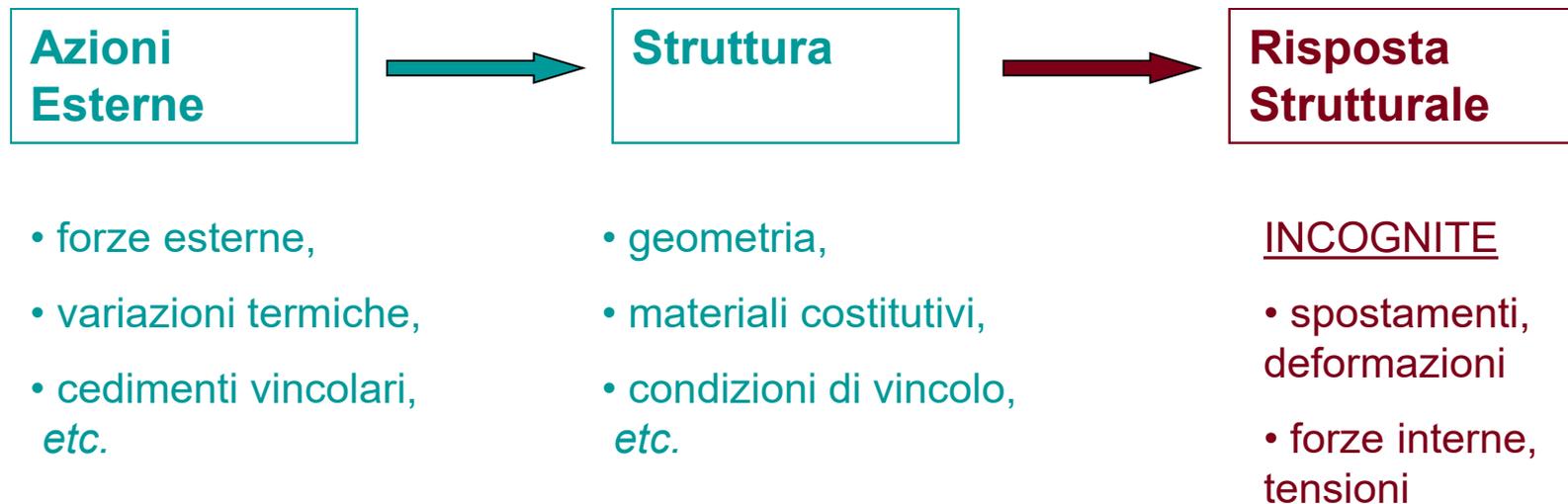
Costruzione



Struttura portante

2.1 Parole chiave

Analisi strutturale: analisi e caratterizzazione della *risposta strutturale* cioè del comportamento meccanico manifestato dalla struttura in risposta alle azioni esterne.



Modelli strutturali

- PARTE I – Corpo rigido
- PARTE II – Trave elastica monodimensionale
- PARTE III – Continuo tridimensionale
- PARTE IV – Cilindro di Saint Venant

Modelli strutturali

- **PARTE I – Corpo rigido**
- PARTE II – Trave elastica monodimensionale
- PARTE III – Continuo tridimensionale
- PARTE IV – Cilindro di Saint Venant

Modelli strutturali

- PARTE I – Corpo rigido
- **PARTE II – Trave elastica monodimensionale**
- PARTE III – Continuo tridimensionale
- PARTE IV – Cilindro di Saint Venant

Modelli strutturali

- PARTE I – Corpo rigido
- PARTE II – Trave elastica monodimensionale
- **PARTE III – Continuo tridimensionale**
- PARTE IV – Cilindro di Saint Venant

Lezione

Parte III - Il modello di continuo deformabile 3D

- Definizioni, ipotesi
- Cinematica del continuo 3D
- Statica del del continuo 3D
- Materiale costitutivo
- Problema elastico

Il modello di continuo deformabile 3D

Mezzo continuo deformabile: corpo ideale *esteso*, *continuo* e *deformabile*.

Proprietà. 1. Esteso: Occupa una porzione finita dello spazio detta *configurazione* C . **2.**

Continuo: La materia costitutiva occupa la porzione di spazio in modo continuo (cioè senza lasciare vuoti), di conseguenza è possibile definire una *corrispondenza biunivoca* fra punti materiali del corpo e punti geometrici dello spazio euclideo. **3. Deformabile:** Il corpo (o qualsiasi sua parte) può cambiare forma e dimensioni: *deformabilità* sia a livello globale che locale. Nel presente modello **non sono consentiti** lacerazione o compenetrazione di materia, ed è assicurata la ‘permanenza della materia’ (*requisiti di plausibilità fisica*)

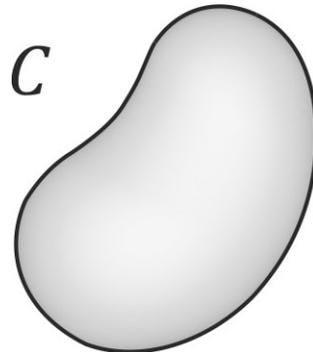
Configurazione:

$S = \partial C$: frontiera

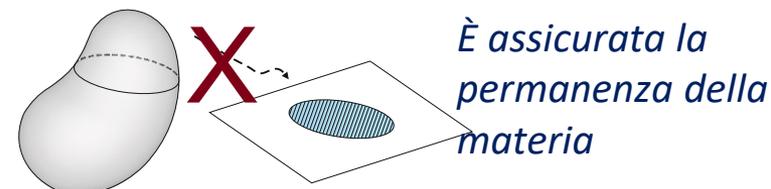
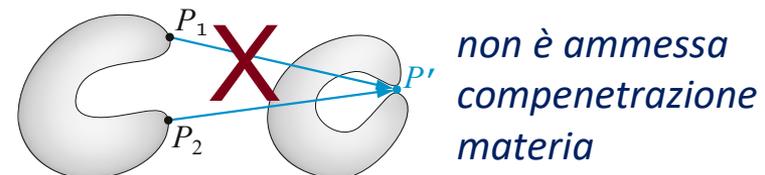
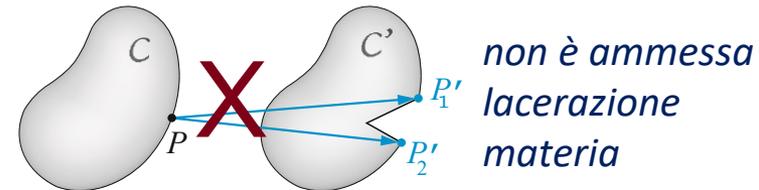
$S = S_u \cup S_f$

S_u : frontiera vincolata

S_f : frontiera libera



Requisiti di plausibilità fisica



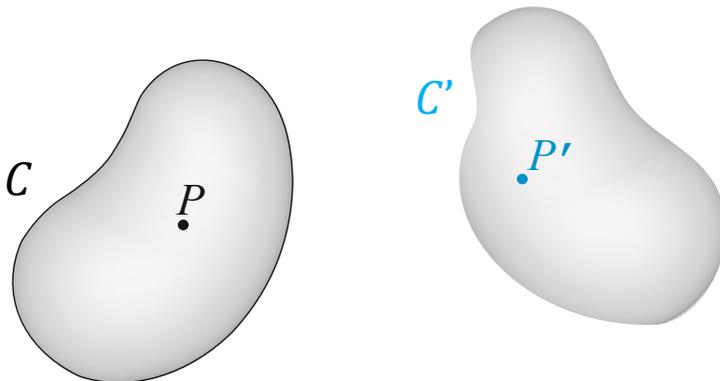
1. Cinematica del continuo 3D

- **Obiettivi**
- **Campo degli spostamenti**
- **Analisi della deformazione**
 - tensore della deformazione $\mathbf{E}(P)$
 - misure di deformazione
- **Equazioni implicite di congruenza**

1. Cinematica del continuo 3D: obiettivi

Obiettivo 1. Definire un modello atto a caratterizzare i cambiamenti di configurazione (da C a C') di un continuo tridimensionale

Obiettivo 2. Definire per il modello le grandezze atte a caratterizzare (misurare) i cambiamenti di forma e/o dimensione a livello globale e locale manifestati dal continuo nel passaggio da C a C'



C : configurazione

$S = \partial C$: frontiera

$S = S_u \cup S_f$

S_u : frontiera vincolata

S_f : frontiera libera

C : configurazione iniziale

C' : configurazione finale

Trasporto f

$f: C \rightarrow C'$

L'applicazione f è biunivoca e ammette un'unica applicazione inversa continua (requisiti plausibilità)

1. Cinematica del continuo 3D : spostamento

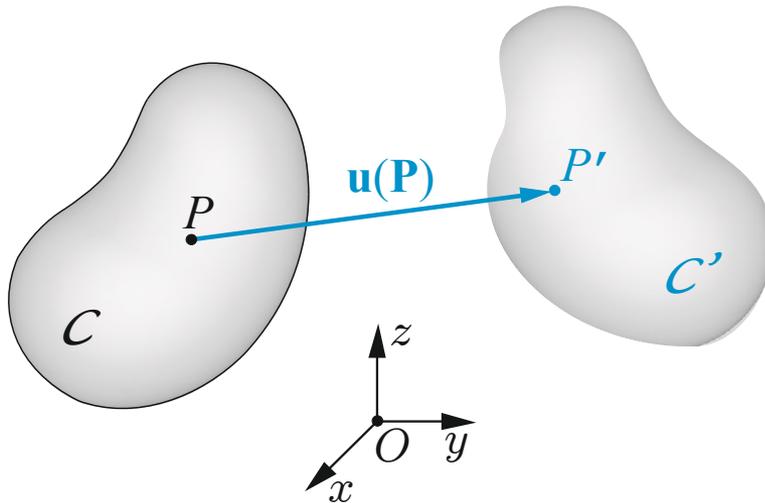
Vettore spostamento. Campo di spostamenti: Assegnato un punto $P \in C$, si definisce spostamento $\mathbf{u}(P)$ il vettore applicato \mathbf{PP}' . Dimensioni fisiche $[L]$, funzione vettoriale di punto. Il campo vettoriale definito dallo spostamento di tutti i punti caratterizza la deformata del continuo.

$$P \equiv (x, y, z)$$

$\mathbf{u}(P) \rightarrow$ *Vettore spostamento* $[L]$

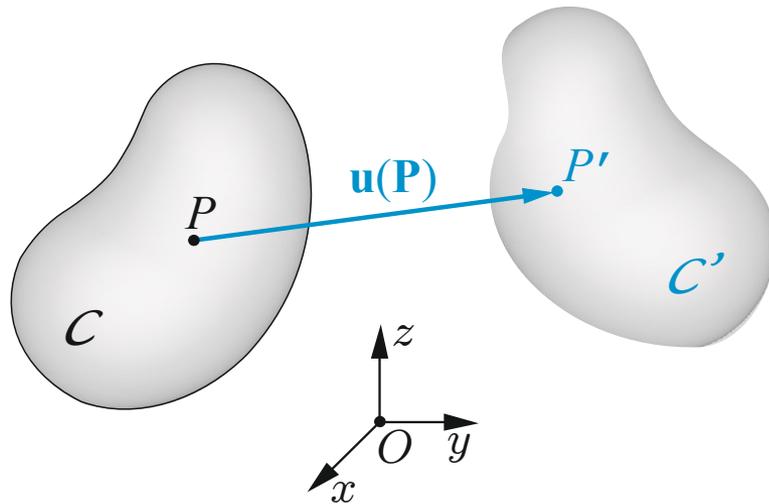
$$\mathbf{u}(P) = \bar{\mathbf{u}} \quad P \in S_u$$

$\bar{\mathbf{u}}$ eventuali cedimenti vincolari assegnati



1. Cinematica del continuo 3D : spostamento

Vettore spostamento. Componenti scalari: Le componenti del vettore $\mathbf{u}(P)$ in un assegnato sistema di riferimento hanno dimensioni fisiche [L] e sono funzioni scalari di tre variabili.



$$\mathbf{u}(P) = \mathbf{u}_P = u(P)\mathbf{i} + v(P)\mathbf{j} + w(P)\mathbf{k}$$

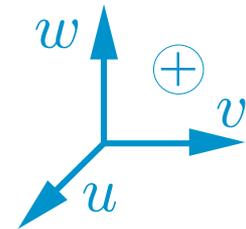
$u(x, y, z) \rightarrow$ componente x [L]

$v(x, y, z) \rightarrow$ componente y [L]

$w(x, y, z) \rightarrow$ componente z [L]

$$P \equiv (x, y, z)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

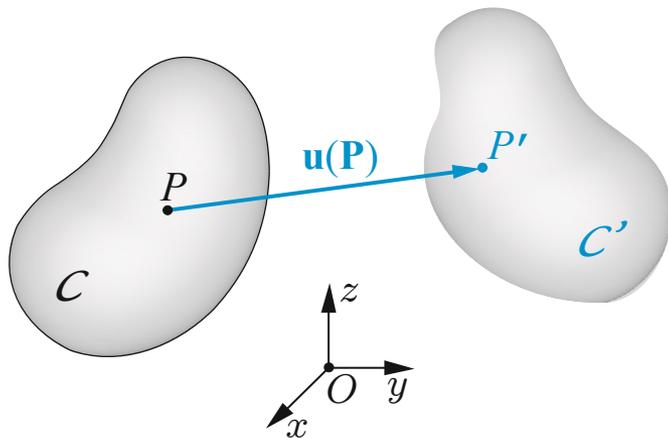


1. Cinematica del continuo 3D : spostamento

Ipotesi 1: piccoli spostamenti

$$\forall P \in C, \quad |\mathbf{u}(P)| \ll \ell \quad \ell \text{ dimensione caratteristica del corpo}$$

Ipotesi 2: regolarità delle funzioni $w(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$



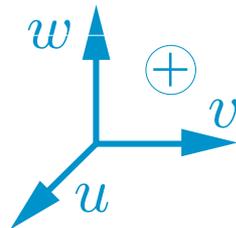
$$\mathbf{u}(P) = \mathbf{u}_P = u(P)\mathbf{i} + v(P)\mathbf{j} + w(P)\mathbf{k}$$

$$u(x, y, z) \rightarrow \text{componente } x \text{ [L]}$$

$$v(x, y, z) \rightarrow \text{componente } y \text{ [L]}$$

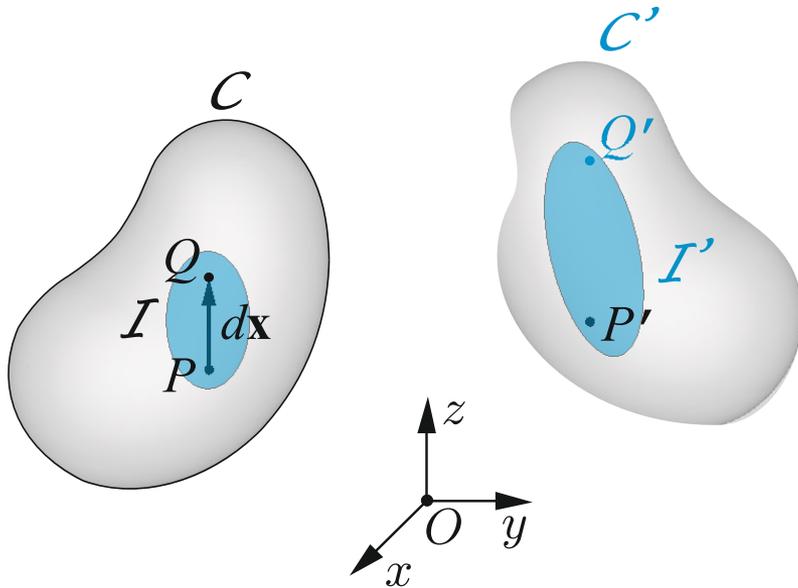
$$w(x, y, z) \rightarrow \text{componente } z \text{ [L]}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$



1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Analisi della deformazione dell'intorno infinitesimo \mathcal{I} di P



$$P \equiv (x, y, z)$$

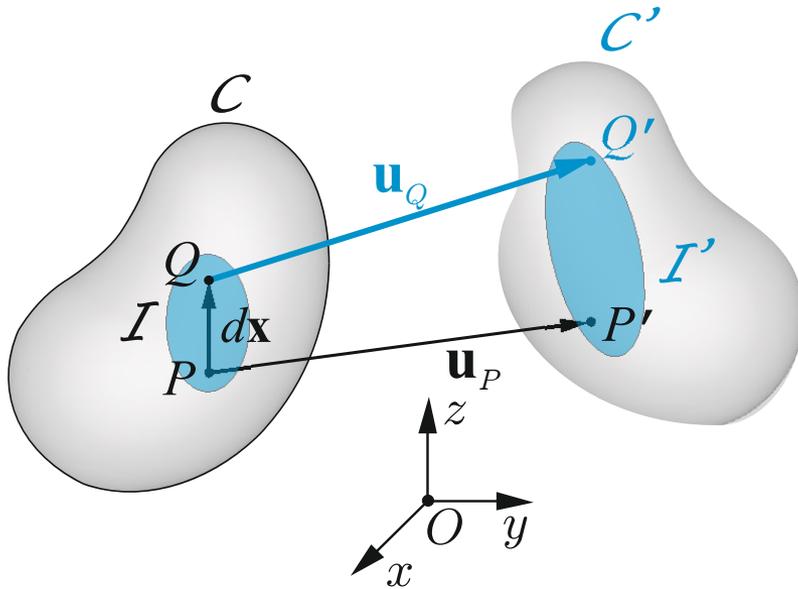
$$Q \equiv (x + dx, y + dy, z + dz)$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{PQ} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

$$d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Analisi della deformazione dell'intorno infinitesimo \mathcal{I} di P



$$\mathbf{u}_P = u(P)\mathbf{i} + v(P)\mathbf{j} + w(P)\mathbf{k}$$

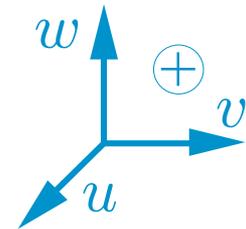
$$\mathbf{u}_Q = u(Q)\mathbf{i} + v(Q)\mathbf{j} + w(Q)\mathbf{k}$$

$$P \equiv (x, y, z)$$

$$Q \equiv (x + dx, y + dy, z + dz)$$

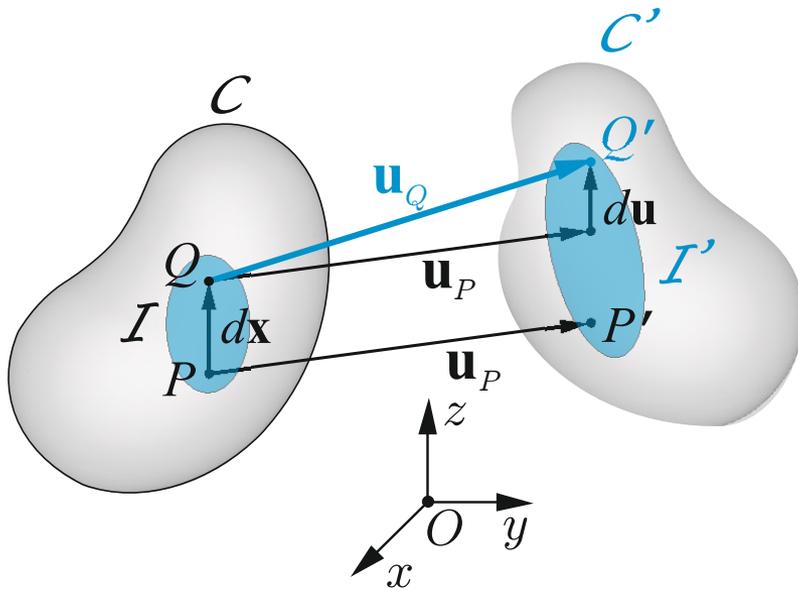
$$d\mathbf{x} = \mathbf{PQ} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

$$d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$



1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Analisi della deformazione dell'intorno infinitesimo \mathcal{I} di P



$$\mathbf{u}_P = u(P)\mathbf{i} + v(P)\mathbf{j} + w(P)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}_Q = u(Q)\mathbf{i} + v(Q)\mathbf{j} + w(Q)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + d\mathbf{u}$$

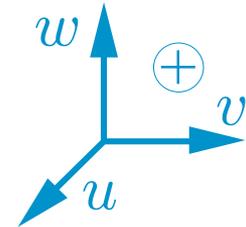
$$d\mathbf{u} = du\mathbf{i} + dv\mathbf{j} + dw\mathbf{k}$$

$$P \equiv (x, y, z)$$

$$Q \equiv (x + dx, y + dy, z + dz)$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{PQ} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

$$d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad d\mathbf{u} = \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix}$$



1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Analisi della deformazione dell'intorno infinitesimo \mathcal{J} di P

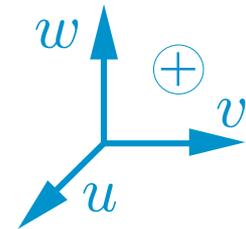
$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + d\mathbf{u}$$

$$d\mathbf{u} = du\mathbf{i} + dv\mathbf{j} + dw\mathbf{k}$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$



$$u(x, y, z) \quad v(x, y, z) \\ w(x, y, z)$$

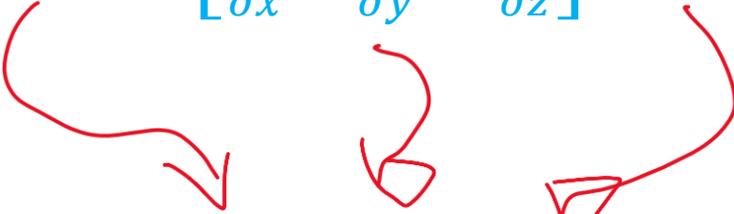
1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Analisi della deformazione dell'intorno infinitesimo \mathcal{J} di P

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + d\mathbf{u}$$

$$d\mathbf{u} = du\mathbf{i} + dv\mathbf{j} + dw\mathbf{k}$$

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$


$$d\mathbf{u} = \mathbf{F}(P)d\mathbf{x}$$

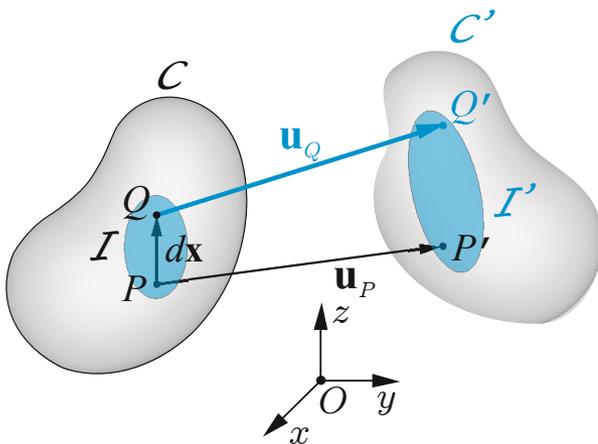
1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Tensore gradiente dello spostamento $F(P)$

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + d\mathbf{u}$$

$$d\mathbf{u} = \mathbf{F}(P)d\mathbf{x}$$

$$\mathbf{F}(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \nabla \mathbf{u}(P)$$



$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + \mathbf{F}(P)d\mathbf{x}$$

Decomposizione del tensore $F(P)$

$$\mathbf{F}(P) = \frac{\mathbf{F} - \mathbf{F}^T}{2} + \frac{\mathbf{F} + \mathbf{F}^T}{2} = \boldsymbol{\Omega}(P) + \mathbf{E}(P)$$

$$\boldsymbol{\Omega}(P) = \frac{\mathbf{F} - \mathbf{F}^T}{2} = \frac{\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T}{2}, \quad \boldsymbol{\Omega} \in \textit{skw}$$

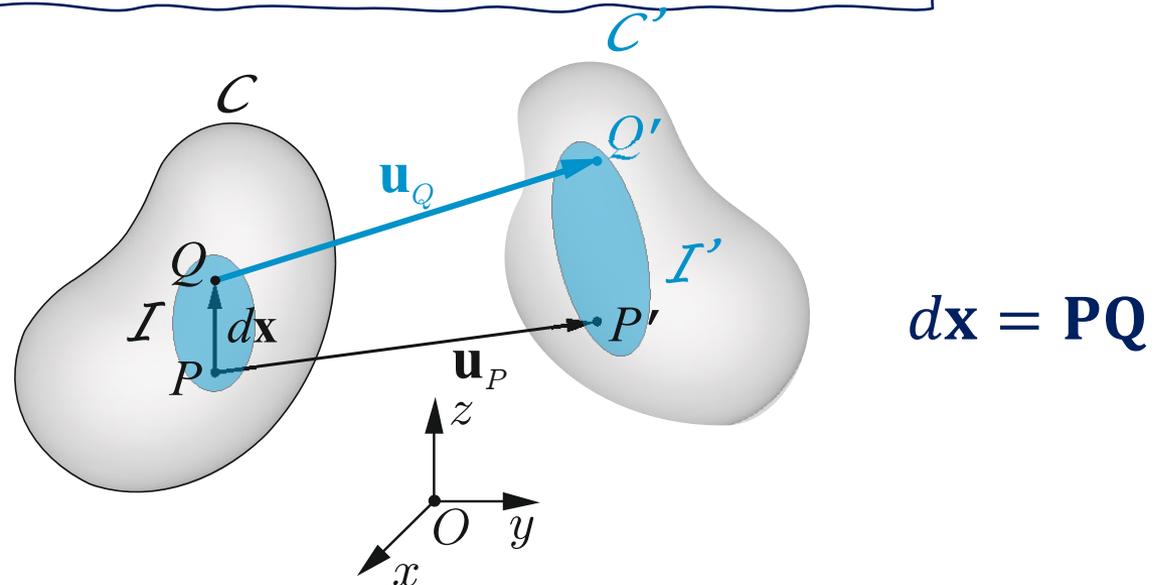
$$\mathbf{E}(P) = \frac{\mathbf{F} + \mathbf{F}^T}{2} = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}, \quad \mathbf{E} \in \textit{symm}$$

Decomposizione dello spostamento

$$\mathbf{F}(P) = \boldsymbol{\Omega}(P) + \mathbf{E}(P)$$

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + \mathbf{F}(P)d\mathbf{x}$$

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + \boldsymbol{\Omega}(P)d\mathbf{x} + \mathbf{E}(P)d\mathbf{x}$$



Interpretazione del tensore emisimmetrico Ω tensore della rotazione rigida Ω

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + \Omega d\mathbf{x} + \mathbf{E}d\mathbf{x}$$

Cosa accade se $\mathbf{E} = \mathbf{0}$?

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + \Omega d\mathbf{x}$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{PQ}$$

$$\Omega = -\Omega^T$$

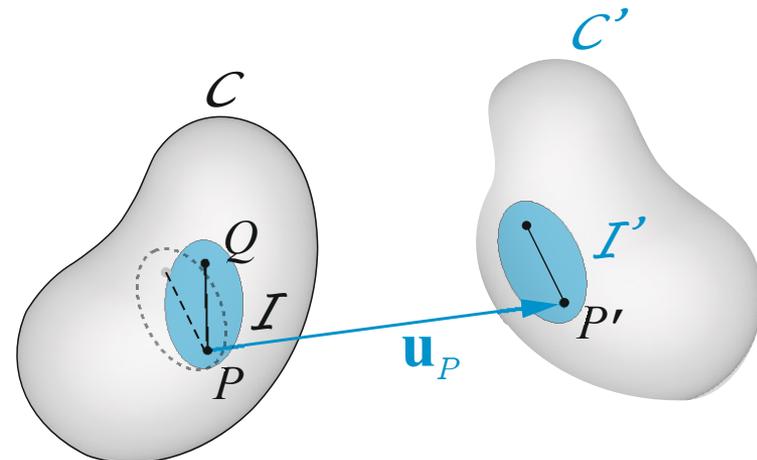
FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \Omega_R \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{OP}$$

$$\Omega_R = -\Omega_R^T$$

se $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, ogni punto Q dell'intorno infinitesimo \mathcal{I} obbedisce alla FGSR con polo di riduzione P . L'intorno \mathcal{I} si sposta come un elemento rigido



Interpretazione del tensore emisimmetrico Ω tensore della rotazione rigida Ω

$$\Omega(P) = \frac{\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T}{2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix} = -\Omega(P)^T$$

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Interpretazione del tensore simmetrico \mathbf{E} tensore della deformazione \mathbf{E}

Solo se $\mathbf{E}(P) \neq \mathbf{0}$, l'intorno \mathcal{J} cambia forma e/o dimensione

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{E}(P)^T$$

Notazione convenzionale delle componenti (misure di deformazione)

$$\mathbf{E}(P) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z,$

$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$

$\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$

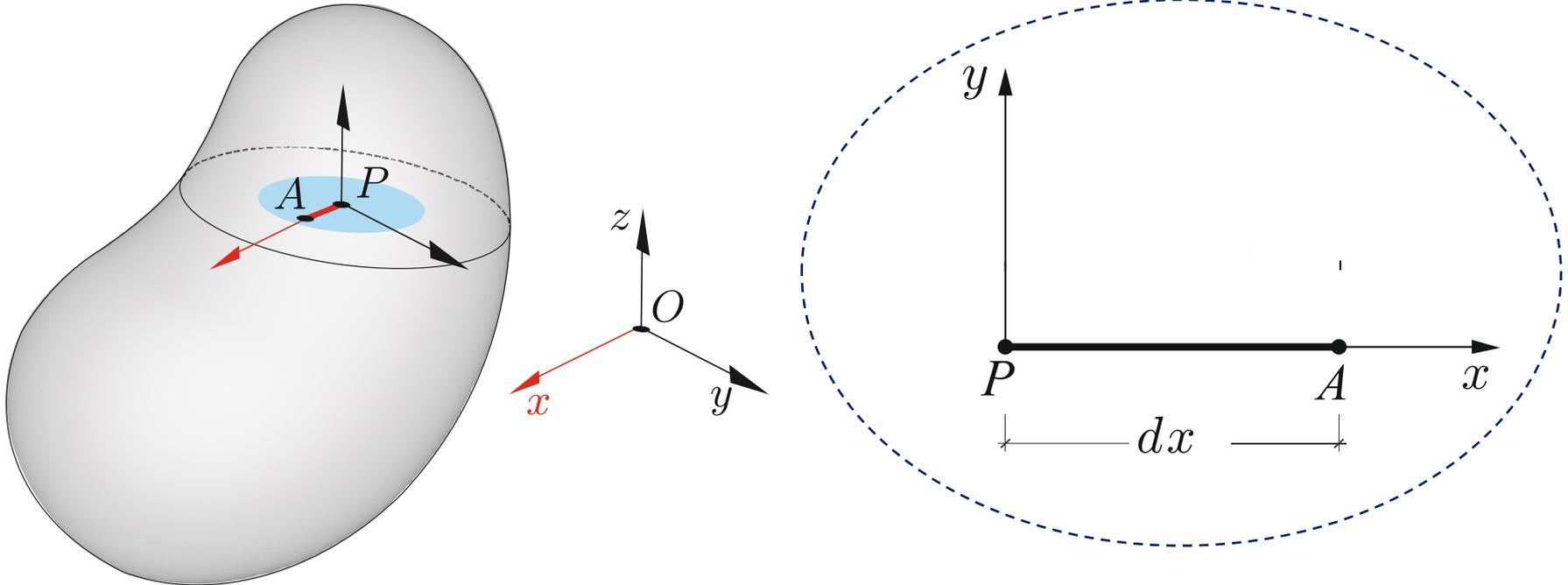
$\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$

ε_i Dilatazioni assiali
 γ_{ij} Scorrimenti angolari

Grandezze
adimensionali [0]

Interpretazione meccanica delle componenti sulla diagonale

Dilatazioni assiali ε_i



$$P \equiv (x, y, z)$$

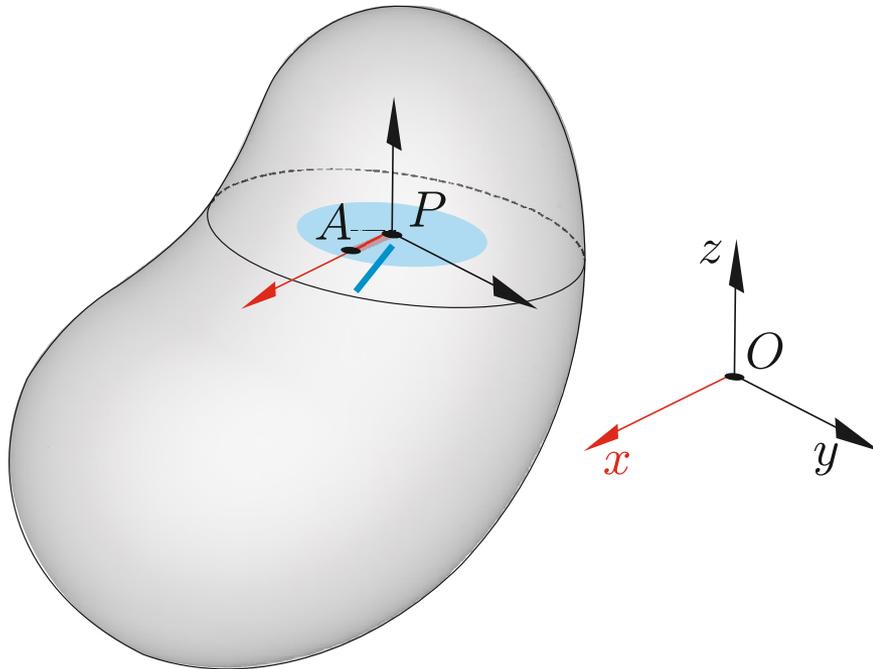
$$A \equiv (x + dx, y, z)$$

$$\mathbf{PA} = dx\mathbf{i} \quad \text{fibra parallela all'asse } x$$

1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Interpretazione meccanica delle componenti sulla diagonale

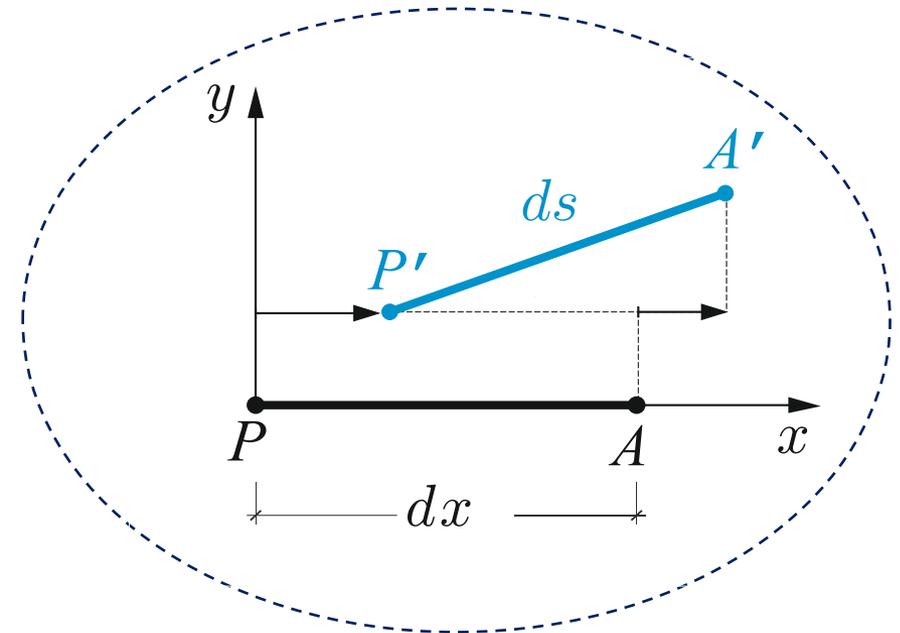
Dilatazioni assiali ε_i



$$P \equiv (x, y, z)$$

$$A \equiv (x + dx, y, z)$$

$\mathbf{PA} = dx\mathbf{i}$ fibra parallela all'asse x

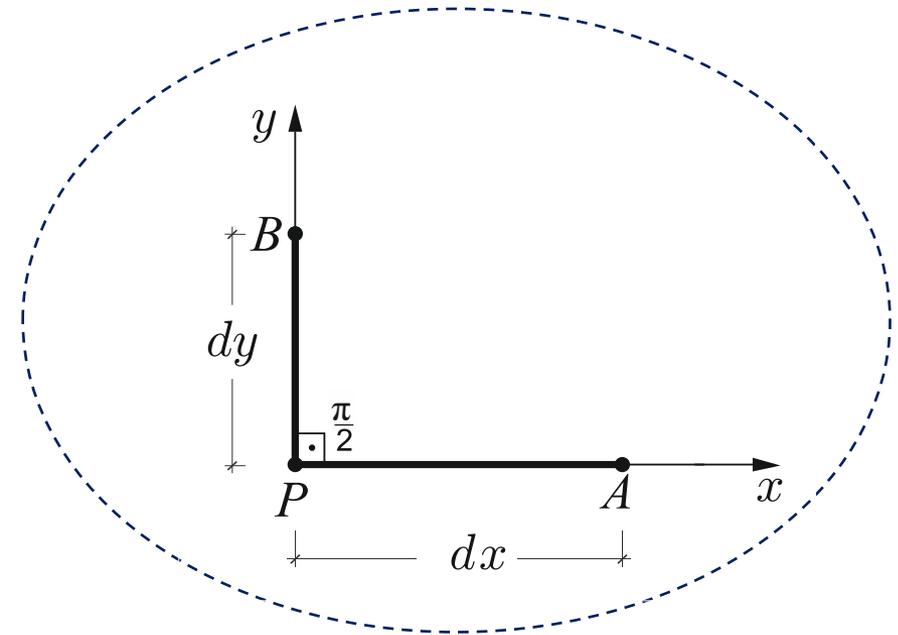
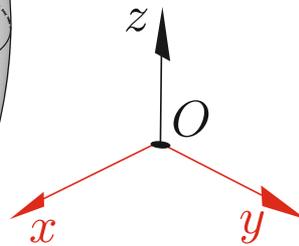
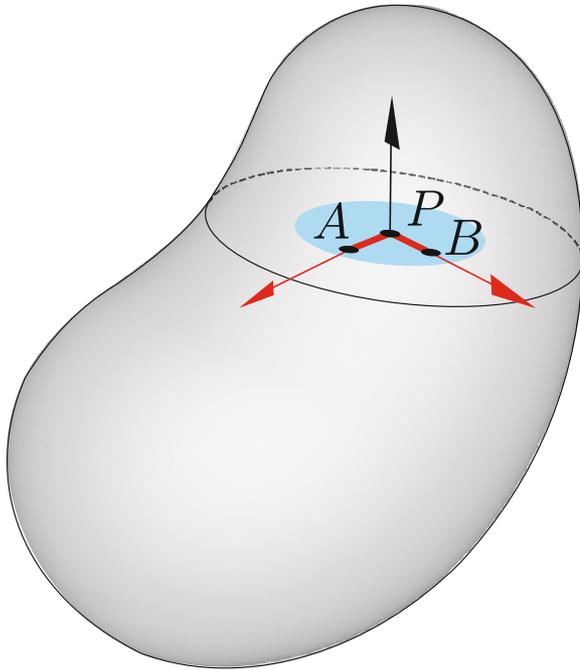


$$\frac{ds - dx}{dx} = \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Variazione percentuale di lunghezza della fibra: ε_x

Interpretazione meccanica delle componenti fuori diagonale

Scorrimenti angolari γ_{ij}



$$P \equiv (x, y, z)$$

$$A \equiv (x + dx, y, z)$$

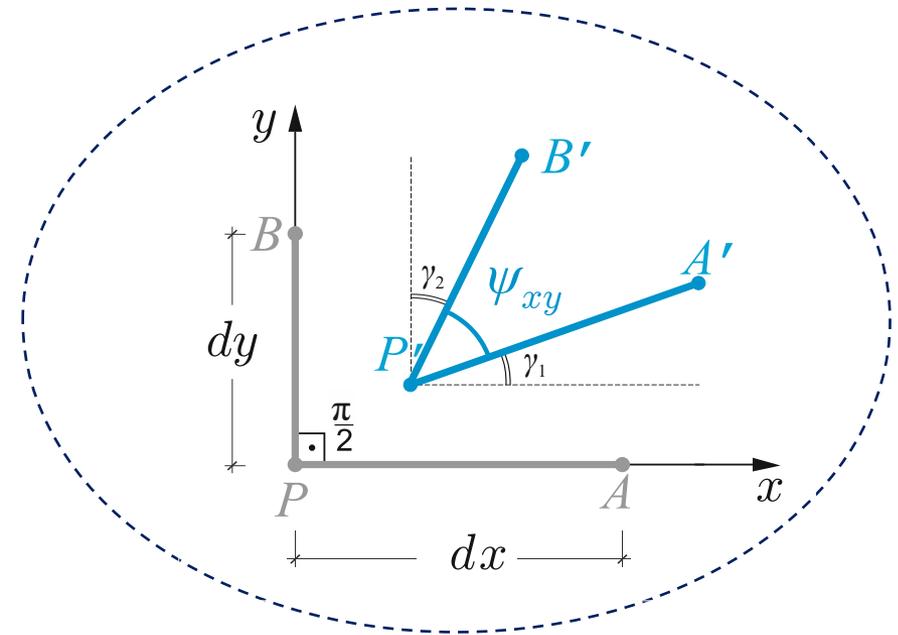
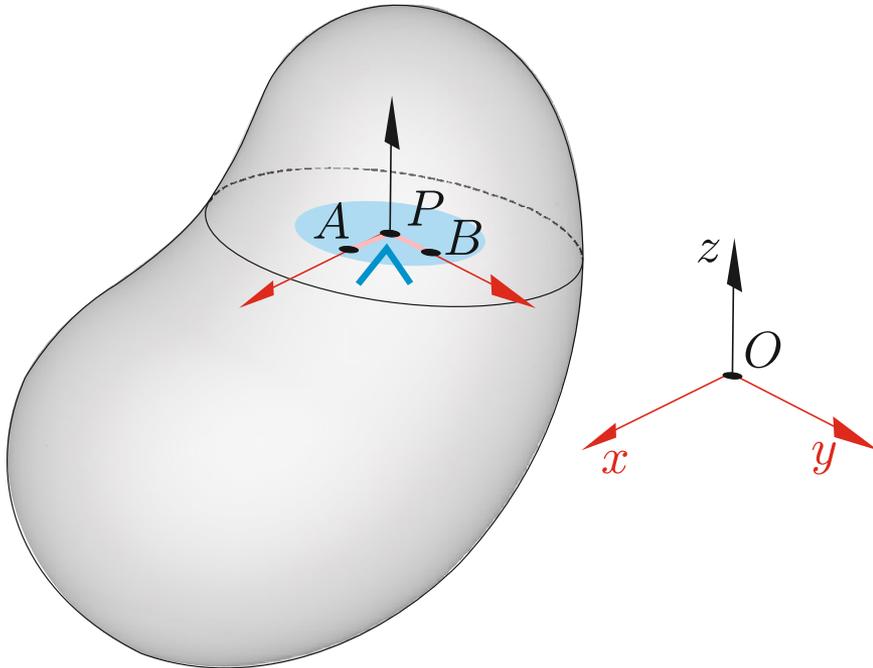
$$B \equiv (x, y + dy, z)$$

$$\mathbf{PB} = dy\mathbf{j} \quad \text{fibra parallela all'asse } y$$

1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Interpretazione meccanica delle componenti fuori diagonale

Scorrimenti angolari γ_{ij}



$$P \equiv (x, y, z)$$

$$A \equiv (x + dx, y, z)$$

$$B \equiv (x, y + dy, z)$$

$$\mathbf{PB} = dy\mathbf{j} \quad \text{fibra parallela all'asse } y$$

$$\frac{\pi}{2} - \psi_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Variazione dell'angolo fra due fibre parallele agli assi x e y

Interpretazione meccanica delle misure di deformazione

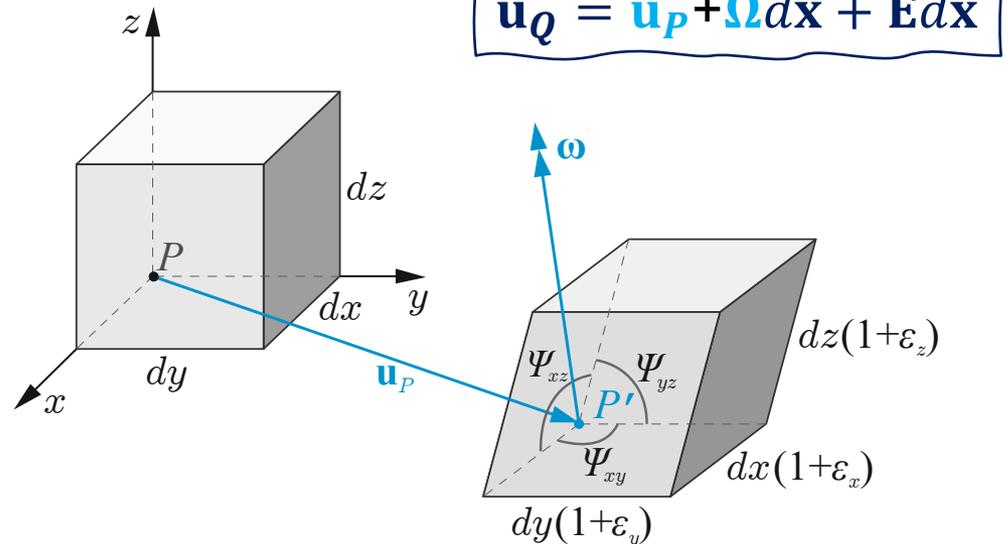
Dilatazioni assiali $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ (variazioni di dimensione)

rappresentano le dilatazioni assiali delle fibre poste secondo le direzioni x , y e z rispettivamente

Scorrimenti angolari $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ (variazioni di forma)

rappresentano le variazioni angolari delle fibre disposte, prima della deformazione, secondo le direzioni (x, y) , (x, z) e (y, z) , rispettivamente

$$\mathbf{E}(P) = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$



Tensore della deformazione

$\mathbf{E}(P) \rightarrow$ dipende solo dal posto P

$\mathbf{E}(P) \in \text{symm} \rightarrow$ è simmetrico: $\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}^T(P)$

Essendo $E_{ij} = E_{ji}$, le componenti indipendenti sono 6 e sono funzioni scalari di tre variabili (grandezze adimensionali, $[E_{ij}] = [0]$)

Ruotando il sistema di riferimento cambiano anche le componenti del tensore ma non variano le seguenti tre funzioni:

$$J_1 = \text{Tr}(\mathbf{E}) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$J_2 = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_z - \frac{1}{4}(\gamma_{xy} + \gamma_{yz} + \gamma_{xz})^2 \quad \rightarrow \text{Invarianti della deformazione}$$

$$J_3 = \det(\mathbf{E})$$

1. Cinematica del continuo 3D : equazioni implicite di congruenza

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}(P) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

The diagram shows the mapping from the tensor components in the first equation to the strain components in the second equation. Red circles and arrows highlight the normal strain components: ε_x is derived from $\frac{\partial u}{\partial x}$, ε_y from $\frac{\partial v}{\partial y}$, and ε_z from $\frac{\partial w}{\partial z}$. Blue circles and arrows highlight the shear strain components: $\frac{1}{2} \gamma_{yx}$ is derived from $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$, $\frac{1}{2} \gamma_{zx}$ from $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$, $\frac{1}{2} \gamma_{xy}$ from $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$, $\frac{1}{2} \gamma_{zy}$ from $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$, and $\frac{1}{2} \gamma_{xz}$ from $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$.

1. Cinematica del continuo 3D : equazioni implicite di congruenza

Forma scalare

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad +c.c.$$

Forma compatta

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}$$

$$\mathbf{u}(P) = \bar{\mathbf{u}} \quad P \in S_u$$

1. Cinematica del continuo 3D : equazioni implicite di congruenza

Forma compatta

Incognite cinematiche

$$\mathbf{u}(P), \mathbf{E}(P)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} \quad P \in \mathcal{C}$$

$$\mathbf{u}(P) = \bar{\mathbf{u}} \quad P \in S_u$$

Forma scalare

Incognite cinematiche

$$u(P), v(P), w(P)$$

$$\varepsilon_x(P), \varepsilon_y(P), \varepsilon_z(P)$$

$$\gamma_{xy}(P), \gamma_{yz}(P), \gamma_{xz}(P)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$