Facoltà di Architettura
Architettura C.U.

Meccanica delle Strutture

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

1. Cinematica del corpo rigido

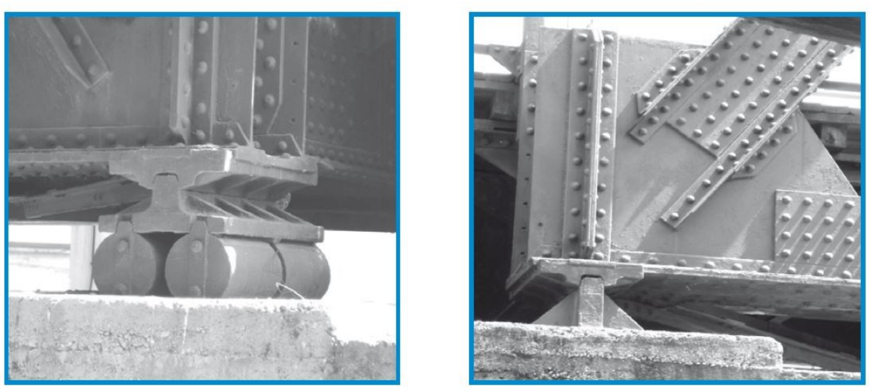
- **Obiettivi**
- **Spostamento rigido**
  - traslazione
  - rotazione
  - rototraslazione
- **Formula Generale dello Spostamento Rigido (FGSR)**
- **I vincoli: prestazioni cinematiche**
- **Il problema cinematico**
- **Classificazione cinematica**
- **Esercizi** (sito: E02-E05, testo: §2.7-2.8)

1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

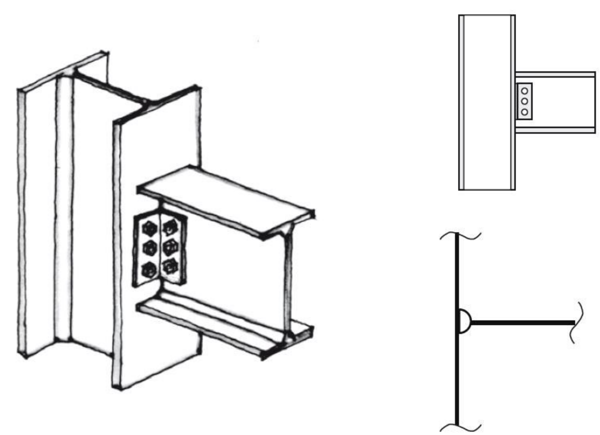
Definizioni. Gli elementi strutturali devono essere collegati fra di loro e con gli elemnti fissi esterni alla struttura (*suolo*). I dispositivi di connessione che realizzano ciò sono detti *vincoli*. I vincoli che collegano gli elementi strutturali con il suolo sono detti **esterni**, i vincoli che collegano due o più elementi della stessa struttura sono detti **interni**.

Modello dei vincoli. I vincoli sono modellati assimilandoli a dispositivi ideali che presentano le seguenti caratteristiche: sono *puntiformi*, *lisci* (privi di attrito) e *bilaterali*. Si ammetterà inoltre valida *l'ipotesi dei piccoli spostamenti*.

Prestazioni cinematiche. Dal punto di vista cinematico i vincoli pongono delle limitazioni agli spostamenti dei punti e/o alle rotazioni dei corpi cui sono applicati, riducendo il numero di gradi di libertà del sistema.



Vincoli esterni



Vincoli interni

1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

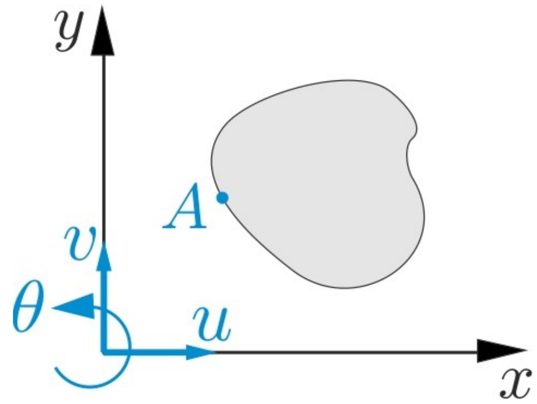
Molteplicità cinematica m. Analiticamente le prescrizioni cinematiche dei vincoli si traducono in equazioni algebriche lineari sugli spostamenti generalizzati: si definisce **molteplicità cinematica** del vincolo il numero m di equazioni scalari indipendenti che ne caratterizzano le prestazioni cinematiche.

Tipologie ideali di vincolo. In base al tipo di prescrizioni cinematiche e alla molteplicità m si possono distinguere diverse tipologie di vincolo (esterni o interni), ad esempio:

- Pendolo o biella, $m = 1$ (vincolo semplice)
- Carrello, $m = 1$ (vincolo semplice)
- Cerniera, $m = 2$ (vincolo doppio)
- Glifo o doppio pendolo, $m = 2$ (vincolo doppio)
- Incastro, $m = 3$ (vincolo triplo)

1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Vincoli esterni



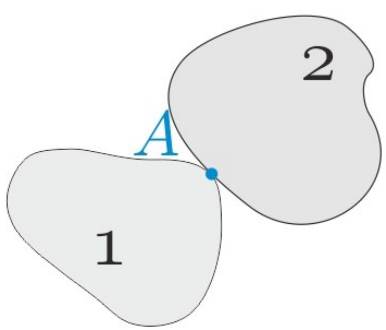
Un vincolo esterno applicato in un punto A del corpo può imporre delle condizioni al vettore spostamento $\mathbf{u}_A$ del punto A in cui è applicato e alla rotazione θ del corpo:

Condizioni su $\mathbf{u}_A$ e/o θ

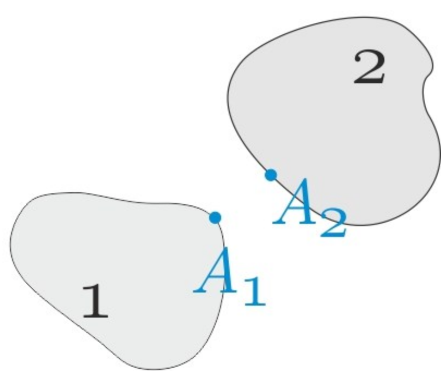
Condizioni sugli scalari u_A e/o v_A e/o θ

Condizioni sul centro assoluto C_R

Vincoli interni fra due corpi



$A \equiv A_1 \equiv A_2$



$\Delta\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_{A2} - \mathbf{u}_{A1}$
$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

Un vincolo interno applicato in un punto $A \equiv A_1 \equiv A_2$ di due corpi può imporre condizioni al vettore spostamento relativo $\Delta\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_{A2} - \mathbf{u}_{A1}$ e alla rotazione relativa $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$:

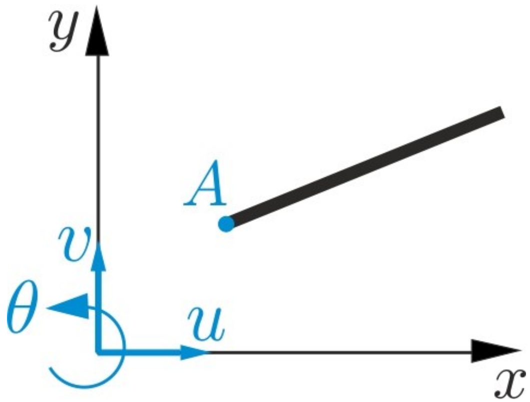
Condizioni su $\Delta\mathbf{u}_A$ e/o $\Delta\theta$

Condizioni sugli scalari Δu_A e/o Δv_A e/o $\Delta\theta$

Condizioni sul centro relativo C_{12}

1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Vincoli esterni



Un vincolo esterno applicato in un punto A del corpo può imporre delle condizioni al vettore spostamento $\mathbf{u}_A$ del punto A in cui è applicato e alla rotazione θ del corpo:

Condizioni su $\mathbf{u}_A$ e/o θ

Condizioni sugli scalari u_A e/o v_A e/o θ

Condizioni sul centro assoluto C_R

Vincoli interni fra due travi

$A \equiv A_1 \equiv A_2$

$\Delta\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_{A2} - \mathbf{u}_{A1}$
$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

Un vincolo interno applicato in un punto $A \equiv A_1 \equiv A_2$ di due corpi può imporre condizioni al vettore spostamento relativo $\Delta\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_{A2} - \mathbf{u}_{A1}$ e alla rotazione relativa $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$:

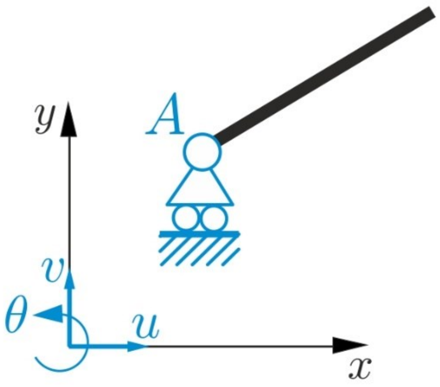
Condizioni su $\Delta\mathbf{u}_A$ e/o $\Delta\theta$

Condizioni sugli scalari Δu_A e/o Δv_A e/o $\Delta\theta$

Condizioni sul centro relativo C_{12}

1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

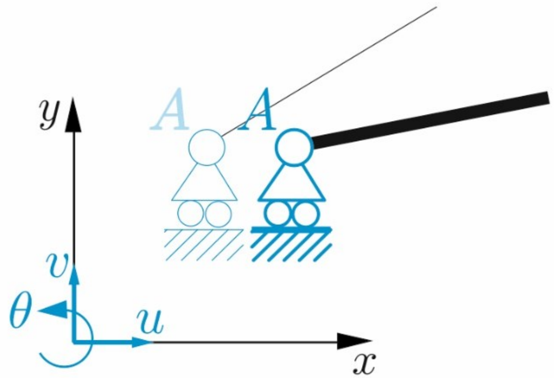
Carrello esterno



Carrello interno

1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

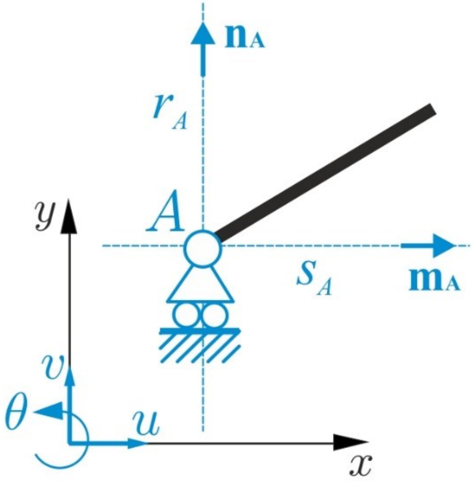
Carrello esterno



Carrello interno

1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Carrello esterno



r_A asse del carrello
s_A asse di scorrimento

$C_R \in r_A$

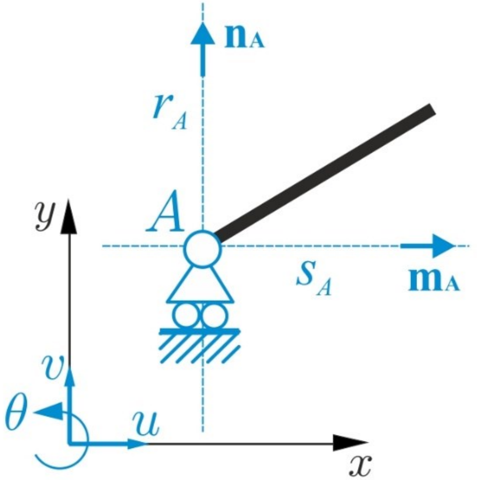
$\mathbf{u}_A \perp \mathbf{n}_A \quad \theta \neq 0$

$\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0 \quad \theta \neq 0$

$$\boxed{\begin{cases} u_A \neq 0 \\ v_A = 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases} \quad m = 1}$$

1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Carrello esterno



r_A asse del carrello
s_A asse di scorrimento

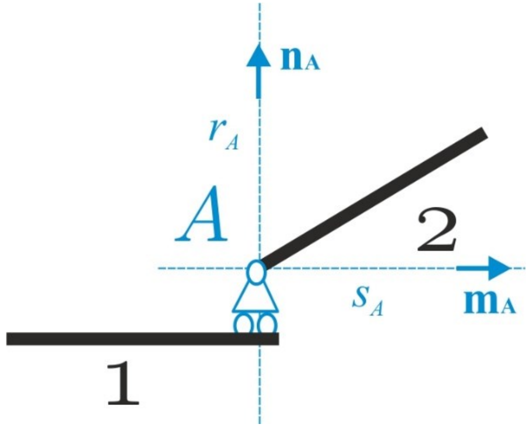
$$C_R \in r_A$$

$$\mathbf{u}_A \perp \mathbf{n}_A \qquad \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$
$$\theta \neq 0 \qquad \theta \neq 0$$

$$\boxed{\begin{cases} u_A \neq 0 \\ v_A = 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases} \quad m = 1}$$

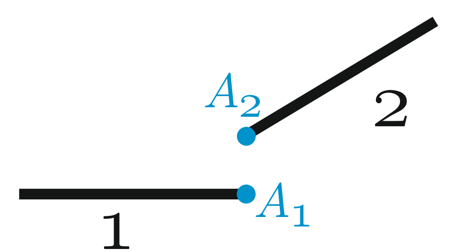
Carrello interno

$$C_{12} \in r_A$$



$$\Delta\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = \mathbf{0}$$
$$\Delta\theta \neq 0$$

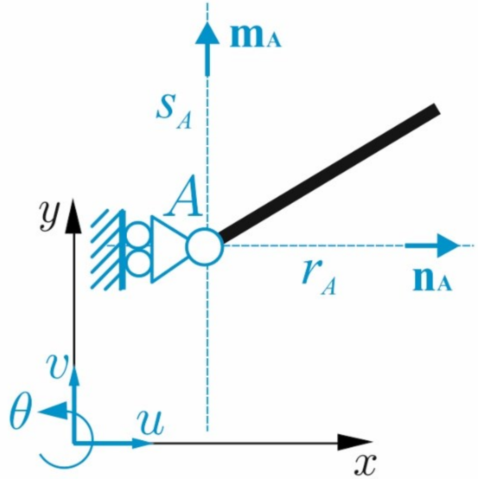
$$\boxed{\begin{cases} u_{A2} - u_{A1} \neq 0 \\ v_{A2} - v_{A1} = 0 \\ \theta_2 - \theta_1 \neq 0 \end{cases} \quad m = 1}$$



$$\Delta\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_{A2} - \mathbf{u}_{A1}$$
$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Carrello esterno



r_A asse del carrello
s_A asse di scorrimento

$$C_R \in r_A$$

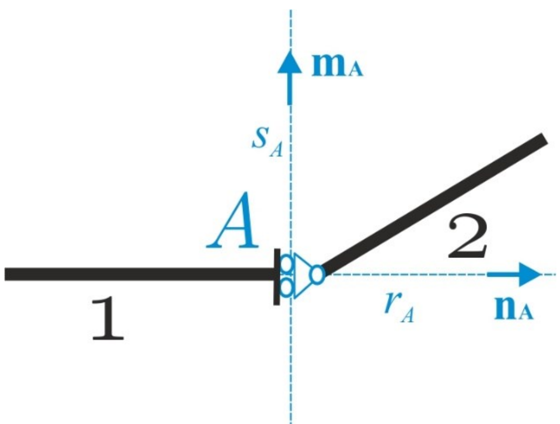
$$\mathbf{u}_A \perp \mathbf{n}_A \qquad \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$
$$\theta \neq 0 \qquad \theta \neq 0$$

$$\boxed{\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A \neq 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases} \quad m = 1}$$

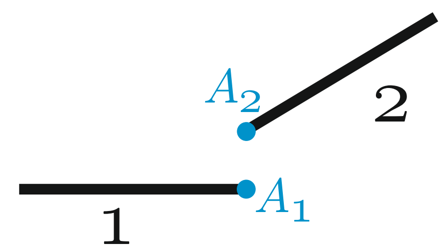
Carrello interno

$$C_{12} \in r_A$$

$$\Delta\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = \mathbf{0}$$
$$\Delta\theta \neq 0$$



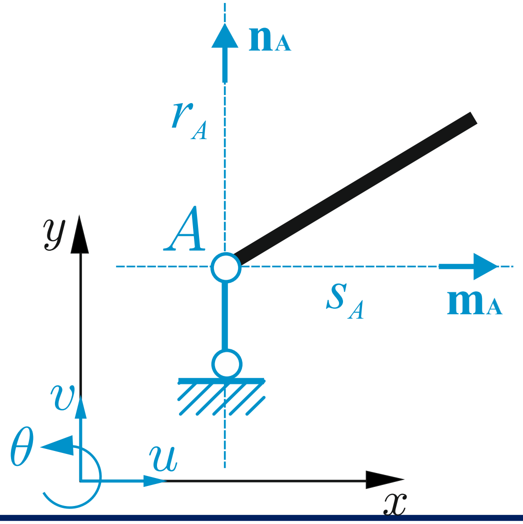
$$\boxed{\begin{cases} u_{A2} - u_{A1} = 0 \\ v_{A2} - v_{A1} \neq 0 \\ \theta_2 - \theta_1 \neq 0 \end{cases} \quad m = 1}$$



$$\Delta\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_{A2} - \mathbf{u}_{A1}$$
$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Pendolo (biella) esterno



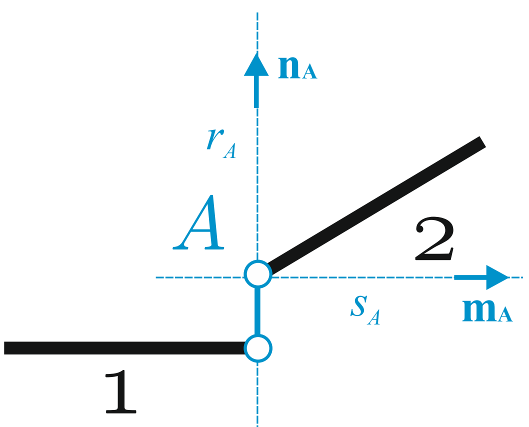
r_A asse del pendolo
s_A asse di scorrimento

$$C_R \in r_A$$

$$\mathbf{u}_A \perp \mathbf{n}_A \qquad \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$
$$\theta \neq 0 \qquad \theta \neq 0$$

$$\begin{cases} u_A \neq 0 \\ v_A = 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases} \quad m = 1$$

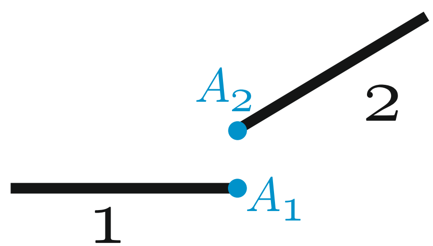
Pendolo (biella) interno



$$C_{12} \in r_A$$

$$\Delta\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$
$$\Delta\theta \neq 0$$

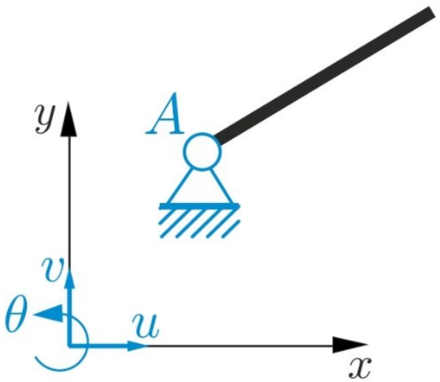
$$\begin{cases} u_{A2} - u_{A1} \neq 0 \\ v_{A2} - v_{A1} = 0 \\ \theta_2 - \theta_1 \neq 0 \end{cases} \quad m = 1$$



$$\Delta\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_{A2} - \mathbf{u}_{A1}$$
$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

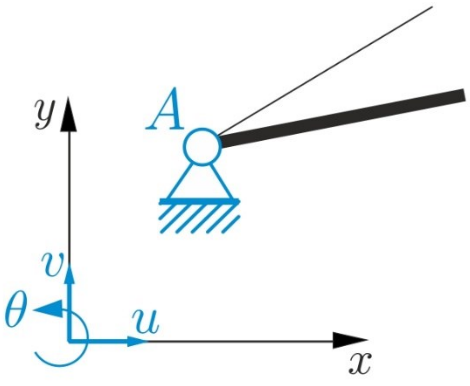
Cerniera esterna



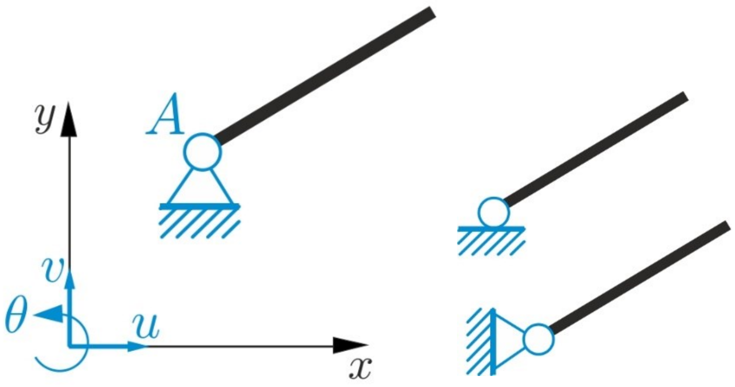
Cerniera interna

1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Cerniera esterna



Cerniera esterna



non ci sono direzioni preferenziali

$$C_R \equiv A$$

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{0}$$
$$\theta \neq 0$$

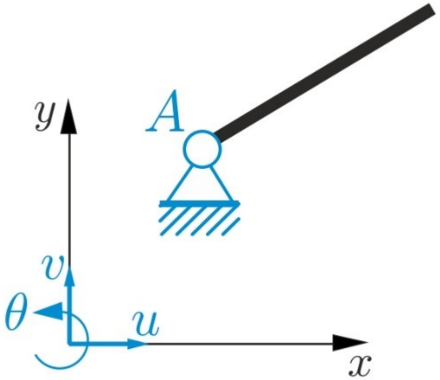
$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases} \quad m = 2$$

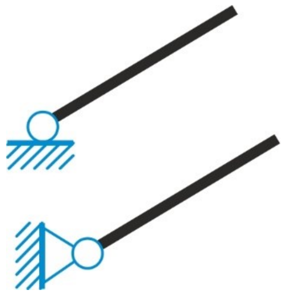
1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Cerniera esterna

non ci sono direzioni preferenziali

$$C_R \equiv A$$



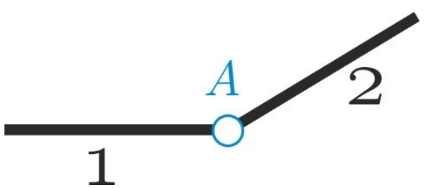


$$\mathbf{u}_A = \mathbf{0}$$
$$\theta \neq 0$$

$$\boxed{\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases} \quad m = 2}$$

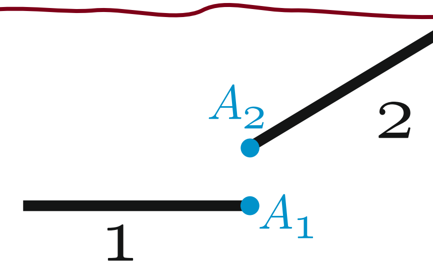
Cerniera interna

$$C_{12} = A$$



$$\Delta\mathbf{u}_A = \mathbf{0}$$
$$\Delta\theta \neq 0$$

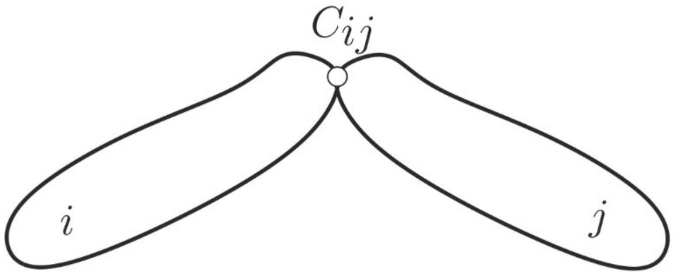
$$\boxed{\begin{cases} u_{A2} - u_{A1} = 0 \\ v_{A2} - v_{A1} = 0 \\ \theta_2 - \theta_1 \neq 0 \end{cases} \quad m = 2}$$



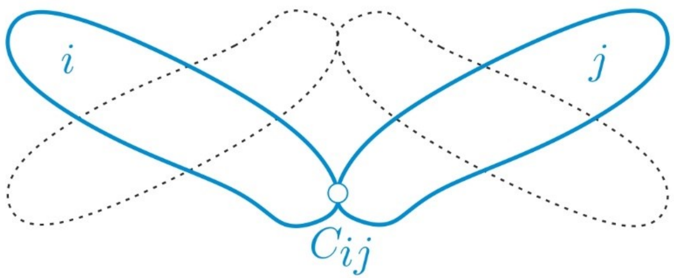
$$\Delta\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_{A2} - \mathbf{u}_{A1}$$
$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR (sistemi)

Sistemi di corpi rigidi, centro rotazione relativa. Presi due *corpi* i e j di un sistema si definisce centro di rotazione relativa o semplicemente *centro relativo* C_{ij} il punto attorno a cui un osservatore solidale al corpo i vede ruotare il corpo j o viceversa.

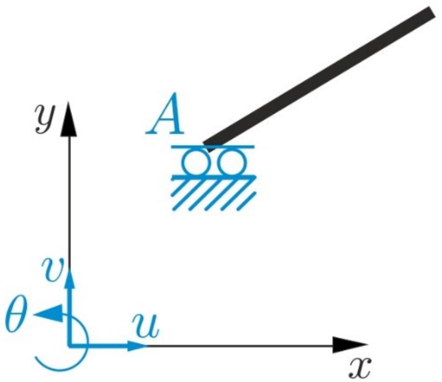


Sistemi di corpi rigidi, centro rotazione relativa. Presi due *corpi i* e *j* di un sistema si definisce centro di rotazione relativa o semplicemente *centro relativo* C_{ij} il punto attorno a cui un osservatore solidale al corpo *i* vede ruotare il corpo j o viceversa.



1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

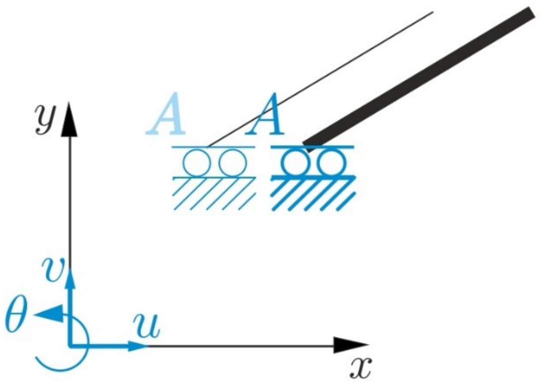
Glifo o doppio pendolo esterno



Glifo o doppio pendolo interno

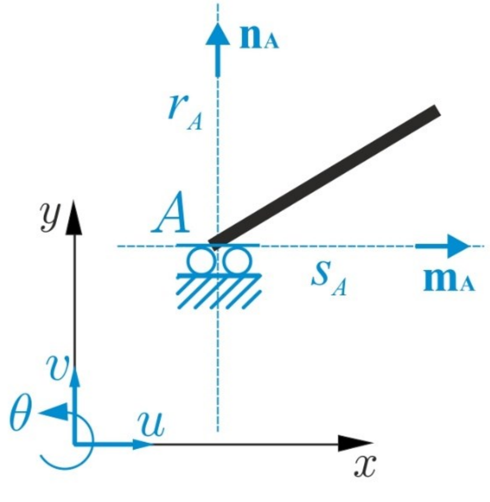
1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Glifo o doppio pendolo esterno



1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

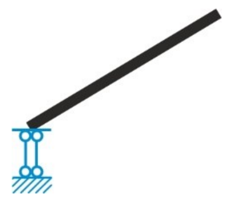
Glifo o doppio pendolo esterno



r_A asse del glifo
s_A asse di scorrimento

$$C_R \equiv C_{r\infty}$$

$$\mathbf{u}_A \perp \mathbf{n}_A \qquad \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$
$$\theta = 0 \qquad \theta = 0$$



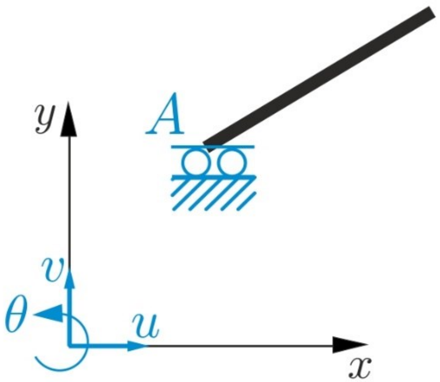
$$\begin{cases} u_A \neq 0 \\ v_A = 0 \\ \theta = 0 \end{cases} \qquad m = 2$$

1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Glifo o doppio pendolo esterno

r_A asse del glifo
s_A asse di scorrimento

$$C_R \equiv C_{r\infty}$$

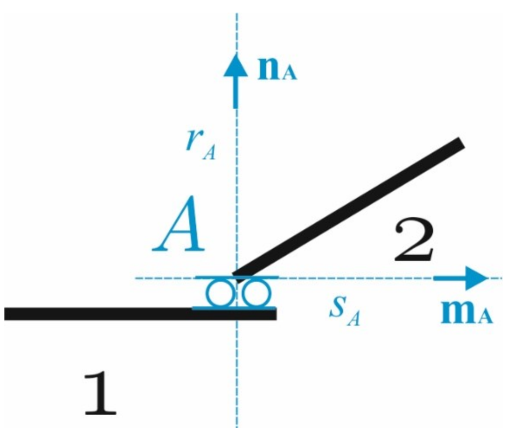


$$\mathbf{u}_A \perp \mathbf{n}_A \quad \theta = 0 \qquad \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0 \quad \theta = 0$$

$$\begin{cases} u_A \neq 0 \\ v_A = 0 \\ \theta = 0 \end{cases} \quad m = 2$$

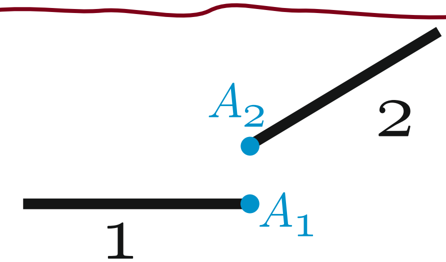
Glifo o doppio pendolo interno

$$C_{12} \equiv C_{r\infty}$$



$$\Delta \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$
$$\Delta\theta = 0$$

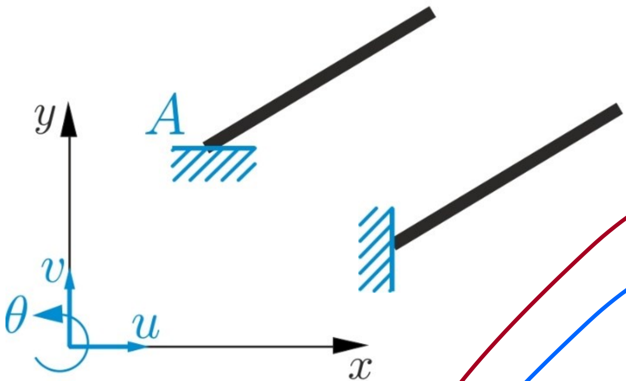
$$\begin{cases} u_{A2} - u_{A1} \neq 0 \\ v_{A2} - v_{A1} = 0 \\ \theta_2 - \theta_1 = 0 \end{cases} \quad m = 2$$



$$\Delta \mathbf{u}_A = \mathbf{u}_{A2} - \mathbf{u}_{A1}$$
$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Incastro esterno



non ci sono direzioni preferenziali

C_R non esiste
Il corpo non può spostarsi

$\mathbf{u_A} = \mathbf{0}$

$\theta = 0$

$$\boxed{\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ \theta = 0 \end{cases} \quad m = 3}$$

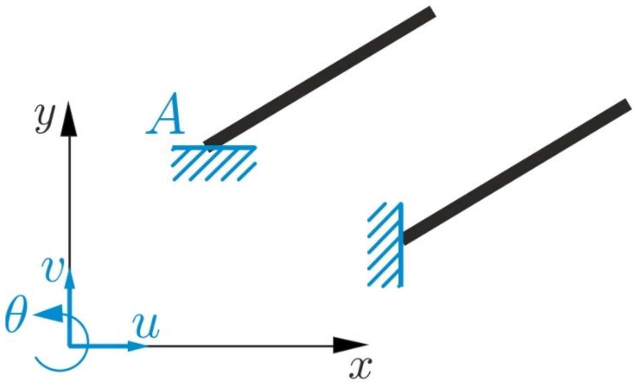
$C_R \equiv A$

$C_R \to \infty$

Condizioni non compatibili: $C_R \nexists$

1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Incastro esterno



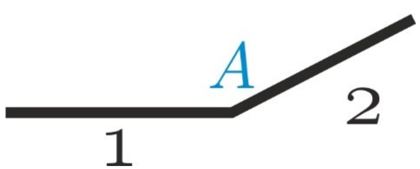
non ci sono direzioni preferenziali

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{0}$$
$$\theta = 0$$

C_R non esiste
Il corpo non può spostarsi

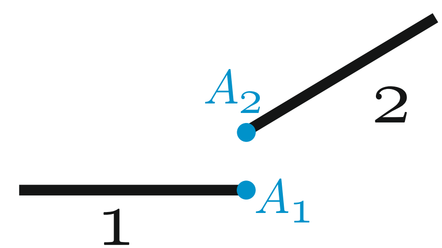
$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ \theta = 0 \end{cases} \quad m = 3$$

Incastro interno (vincolo di continuità)



$$C_{12} \nexists$$
$$\Delta \mathbf{u}_A = \mathbf{0}$$
$$\Delta\theta = 0$$

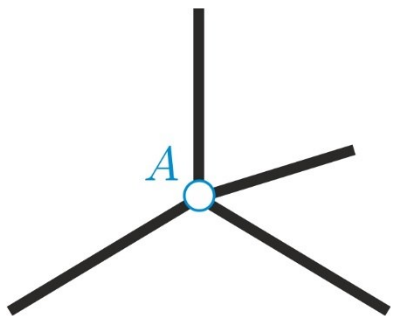
$$\begin{cases} u_{A2} - u_{A1} = 0 \\ v_{A2} - v_{A1} = 0 \\ \theta_2 - \theta_1 = 0 \end{cases} \quad m = 3$$



$$\Delta \mathbf{u}_A = \mathbf{u}_{A2} - \mathbf{u}_{A1}$$
$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Vincoli interni che connettono più di due corpi



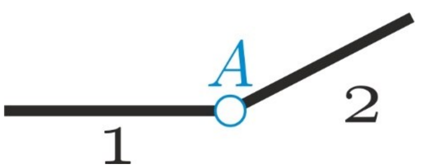
$m = 2(4\text{-}1) = 6$

Molteplicità

$m = n_V(n_C\text{-}1)$

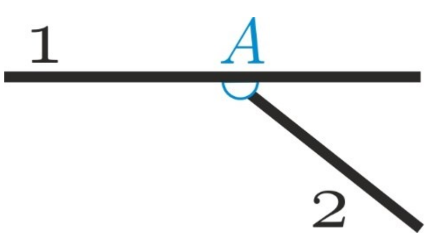
Rappresentazione grafica

$m = 2$



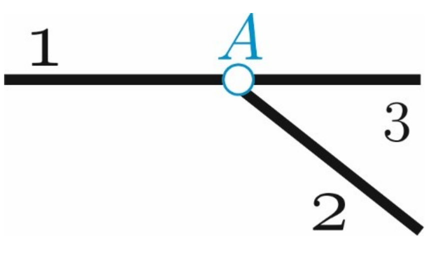
Cerniera che collega due travi alle estremità

$m = 2$



Cerniera che collega due travi non alle estremità

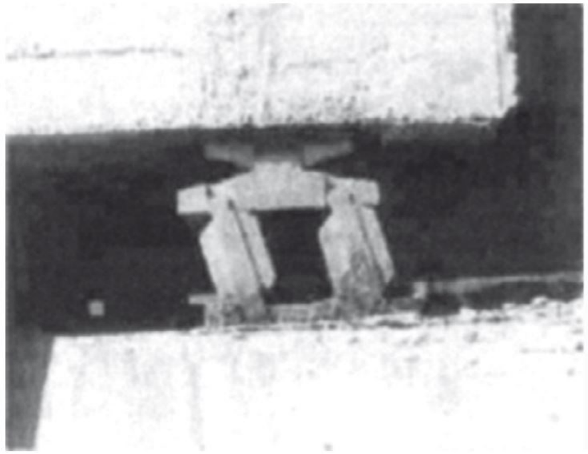
$m = 4$



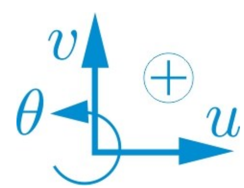
Cerniera che collega tre travi alle estremità

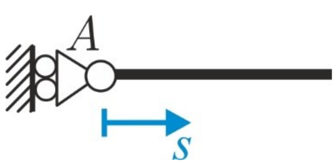
1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Cedimenti vincolari



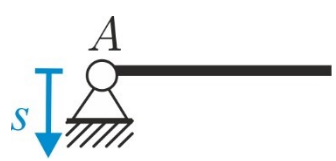
Modello: esempi





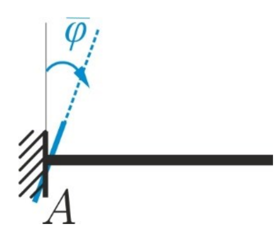
Cedimento carrello

$$\begin{cases} u_A = s \\ v_A \neq 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases}$$



Cedimento cerniera

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = -s \\ \theta \neq 0 \end{cases}$$



Cedimento angolare incastro

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ \theta = -\bar{\varphi} \end{cases}$$

FGSR per spostamenti piani: *riepilogo*

FGSR in forma vettoriale

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{OP}$$

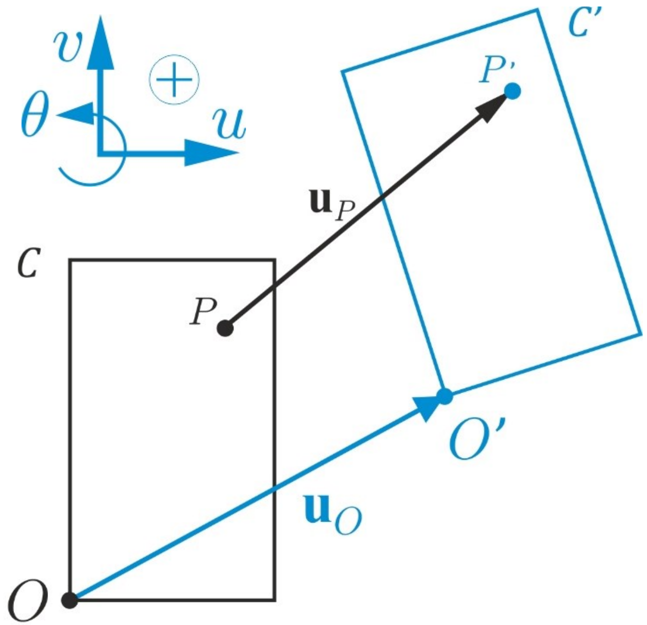
FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O - \theta y \\ v = v_O + \theta\, x \end{cases}$$

(origine coincidente con il polo)

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$



Vettore spostamenti generalizzati

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_O \\ v_O \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3x1)$$

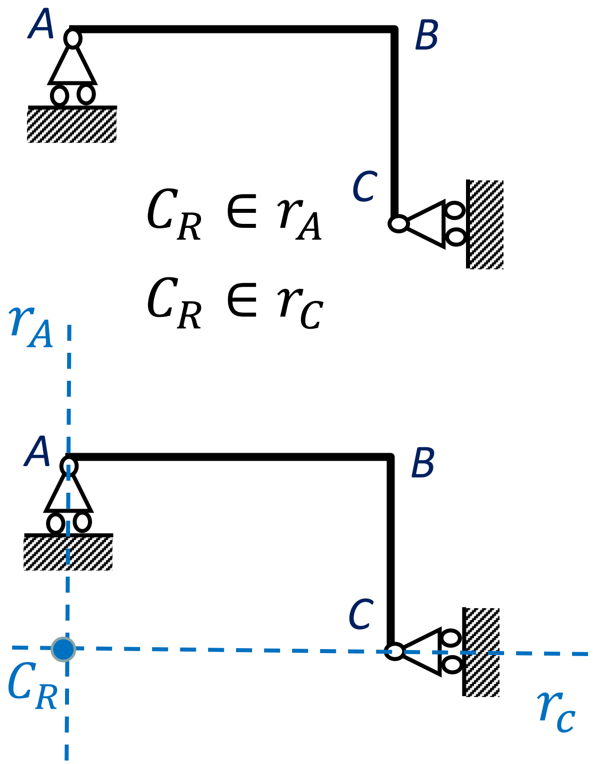
Numero di g.d.l: $n = 3$

Ogni generico spostamento piano (infinitesimo) è riconducibile ad una rotazione rigida intorno ad un punto C_R *detto* ***centro assoluto di rotazione***

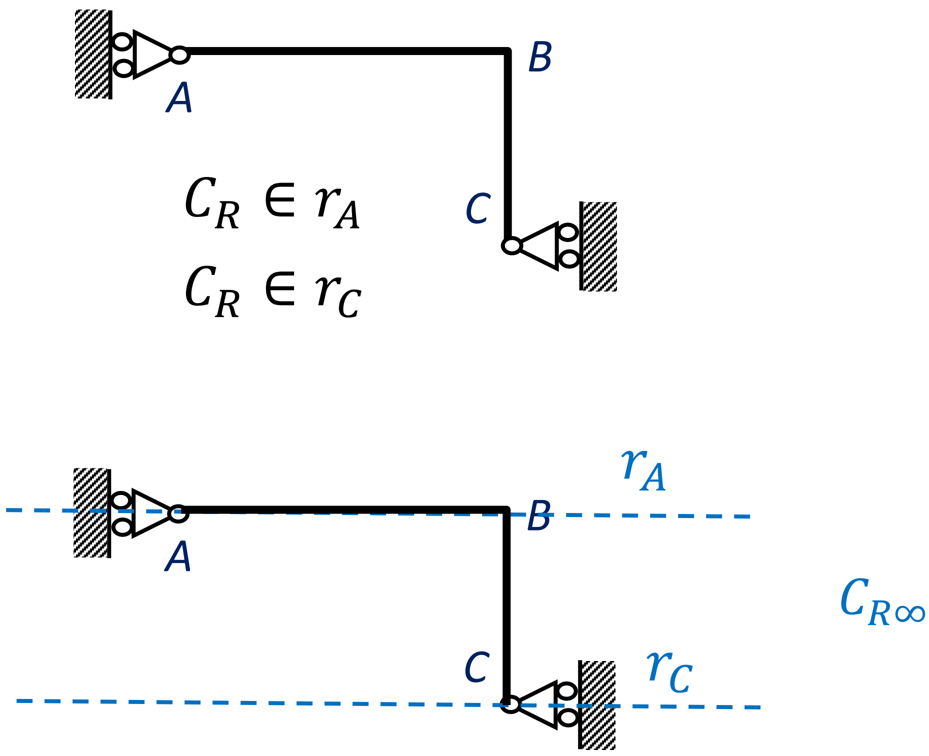
1. Cinematica del corpo rigido

Esercizio:

trovare, se esiste, il centro di rotazione nei seguenti corpi rigidi vincolati



Cerniera ideale

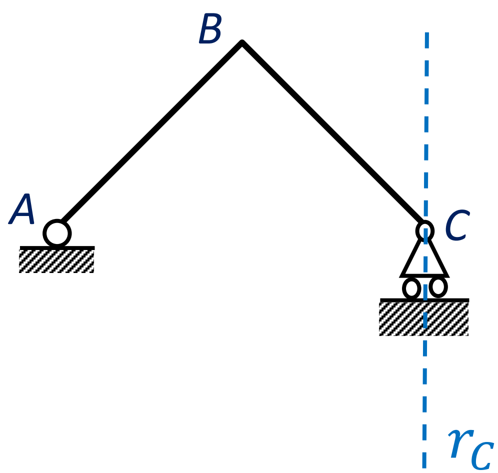


Glifo ideale

1. Cinematica del corpo rigido

Esercizio:

trovare, se esiste, il centro di rotazione nel seguente corpo rigido vincolato



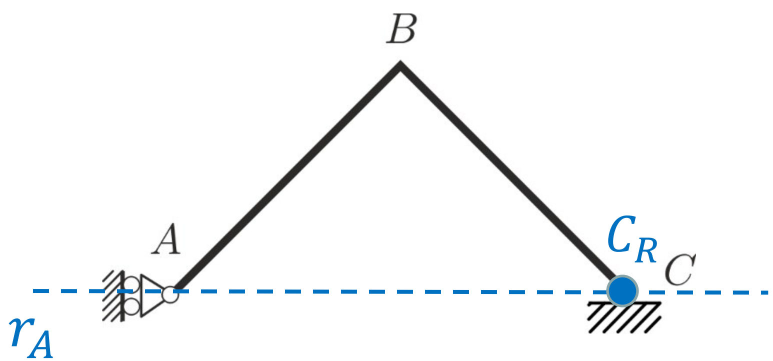
$$\boxed{\begin{array}{l} C_R \equiv A \\ C_R \in r_C \end{array}} \Rightarrow \textit{incompatibili}$$

$$\nexists C_R$$

Trave semplicemente appoggiata (non sono possibili spostamenti compatibili con i vincoli)

1. Cinematica del corpo rigido

Esercizio:
trovare, se esiste, il centro di rotazione nel seguente corpo rigido vincolato



$$\boxed{\begin{array}{l} C_R \in r_A \\ C_R \equiv C \end{array}} \Rightarrow compatibili$$

$$\exists C_R$$

Trave appoggiata degenere (sono possibili spostamenti compatibili con i vincoli)