

Meccanica delle Strutture

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

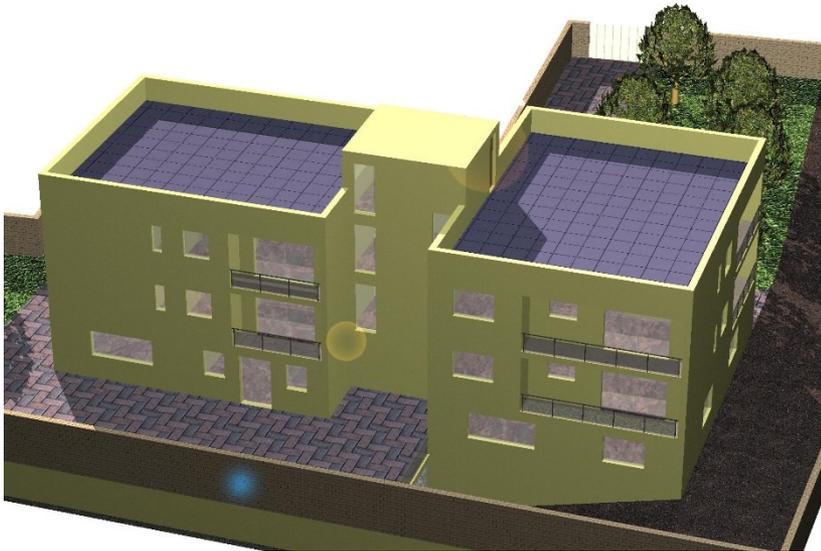
Testo di riferimento:

Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

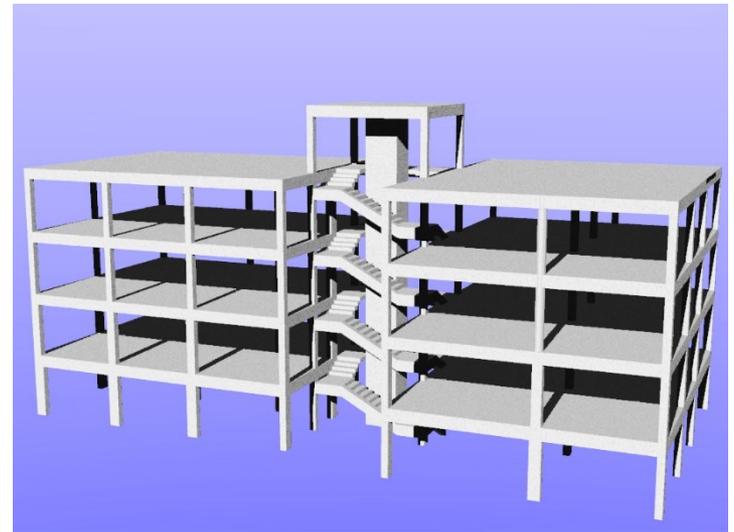


2.1 Parole chiave

Struttura portante: insieme degli elementi strutturali e dei vincoli: ha il compito di rispondere alle azioni esterne in modo che la costruzione nel suo complesso possa svolgere in modo adeguato le funzioni per le quali è stata realizzata



Costruzione

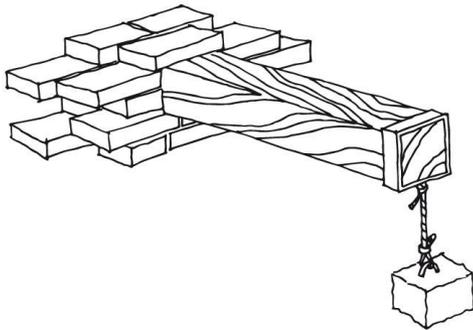


Struttura portante

2.1 Parole chiave

Risposta strutturale: comportamento meccanico della struttura conseguente alle azioni esterne.

Esempio



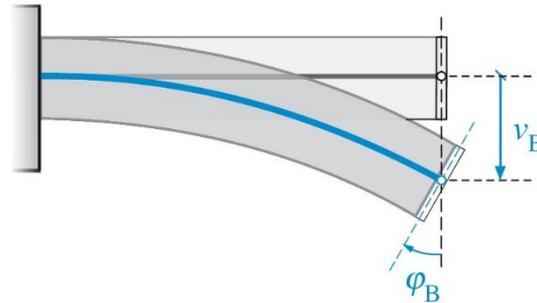
Struttura:

Trave di legno incastrata

Azioni esterne:

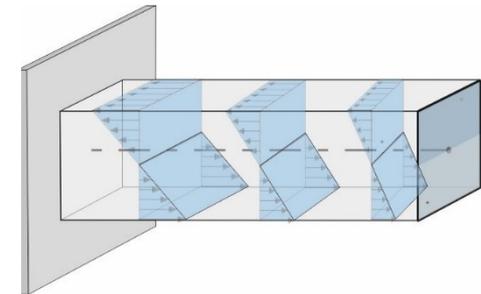
Carico all'estremo libero
Peso proprio trave
Forze reattive all'incastro

Risposta strutturale



Risposta cinematica:

Spostamenti,
deformazioni

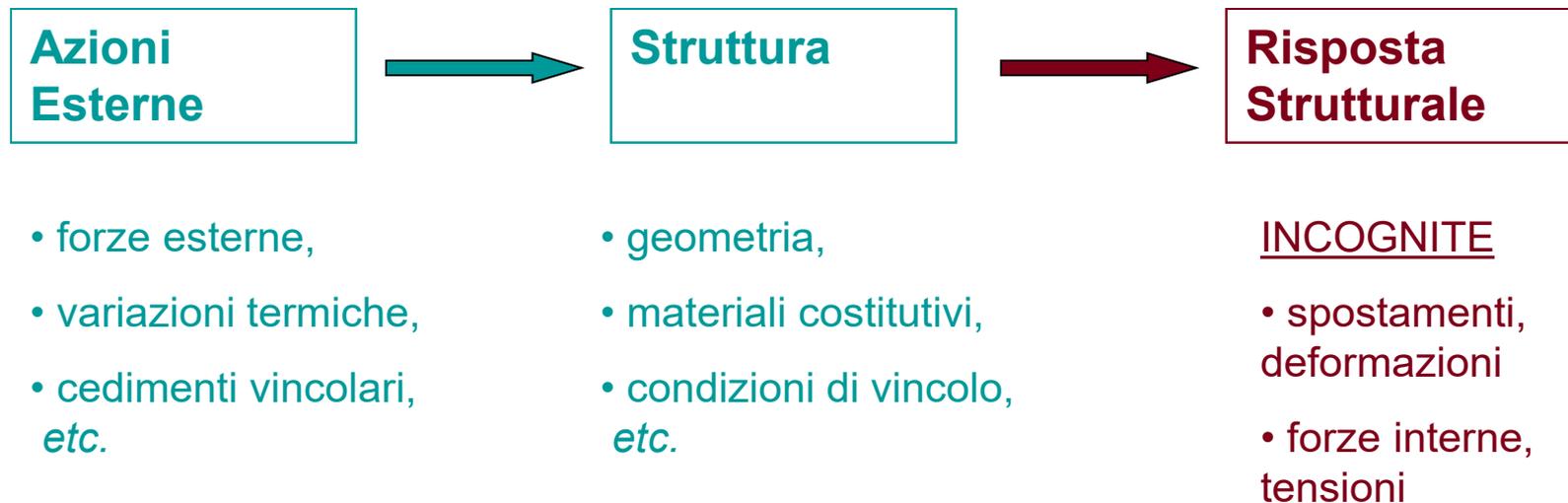


Risposta statica:

Forze interne,
tensioni

2.1 Parole chiave

Analisi strutturale: analisi e caratterizzazione della *risposta strutturale* cioè del comportamento meccanico manifestato dalla struttura in risposta alle azioni esterne.



2.3 Programma del corso

disponibile su www.pcasini.it/disg/statica

Parte I – Modello di corpo rigido: travi rigide

Parte II - Travi elastiche monodimensionali (1D)

Parte III - Continuo tridimensionale di Cauchy (3D)

Parte IV - Cilindro di Saint Venant, problema di Saint Venant

Parte V - Stabilità e resistenza strutturale



Lezione

Parte I - Il modello di corpo rigido

- Definizioni, notazioni, limiti del modello
- Sistemi di corpi rigidi
- Cinematica del corpo rigido
- Statica del corpo rigido

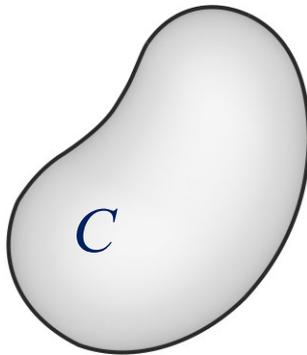
Il modello di corpo rigido

Corpo rigido: corpo ideale *esteso* e *continuo* che gode della seguente proprietà: la mutua distanza fra due suoi punti *comunque scelti* è immutabile.

Proprietà. 1. Esteso: Occupa una porzione finita dello spazio detta *configurazione C*.

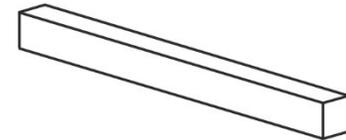
2. Continuo: La materia costitutiva è distribuita *con continuità* (cioè senza lasciare vuoti) all'interno dello spazio occupato dal corpo: di conseguenza è possibile definire una corrispondenza biunivoca fra punti materiali del corpo e punti geometrici dello spazio euclideo. **3. Indeformabile:** Il corpo (o qualsiasi sua parte) non può mai cambiare forma e dimensioni: *indeformabilità* sia a livello globale che locale.

Configurazione:



Possibili geometrie:

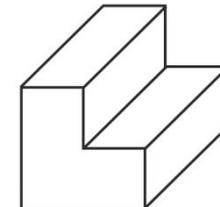
1D



2D



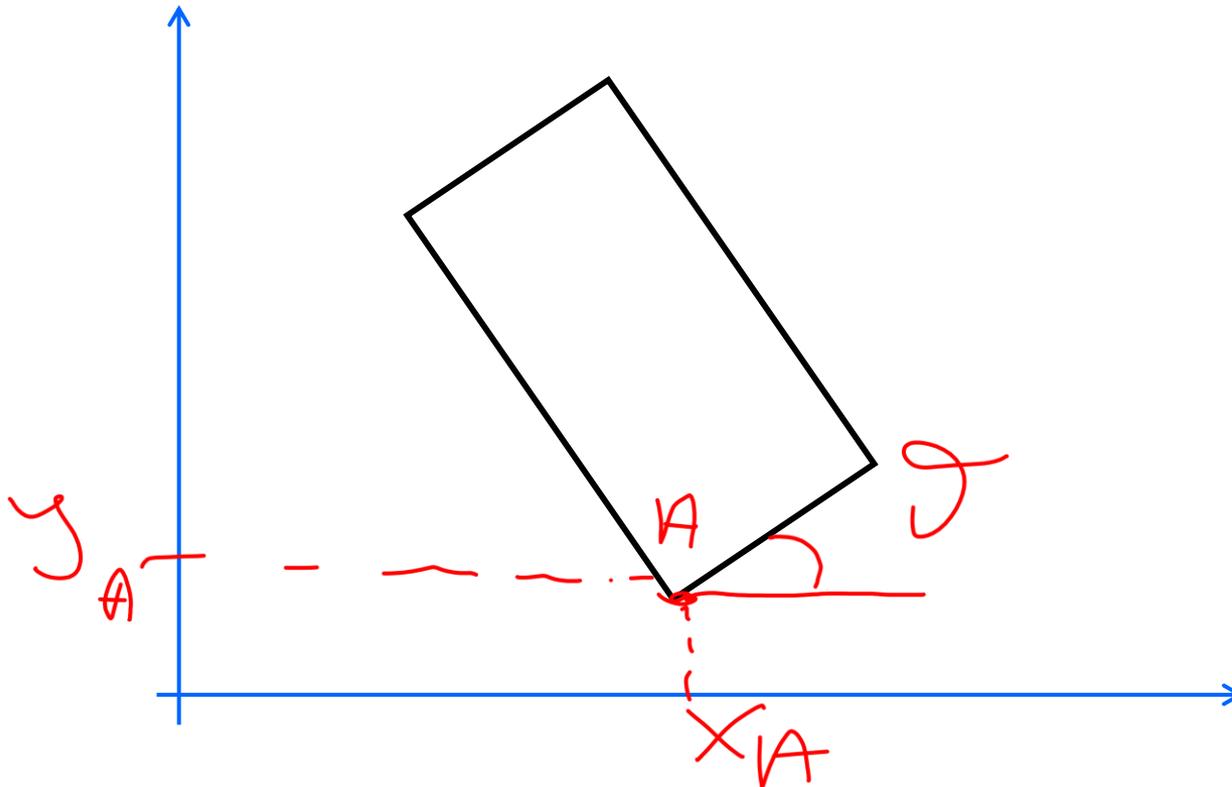
3D



Il modello di corpo rigido

Numero di gradi di libertà n : numero di parametri indipendenti strettamente necessari a individuare in modo univoco la configurazione di un corpo rigido nello spazio. Nel piano $n=3$; nello spazio $n = 6$.

Esempio

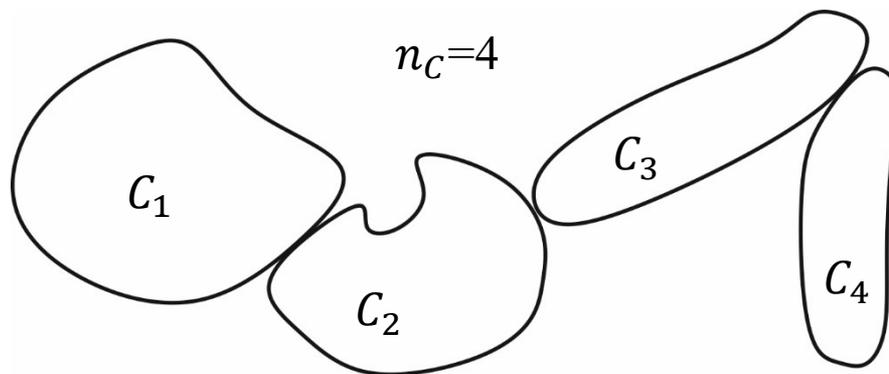


Sistemi di corpi rigidi

Sistemi di corpi rigidi. Le strutture sono generalmente costituite da più elementi strutturali collegati fra di loro; se si adotta per ciascun elemento il modello di corpo rigido, è utile definire la nozione di *sistema di corpi rigidi*: insieme di n_C corpi rigidi, dove n_C è il numero di corpi rigidi costituenti il sistema.

Si definisce configurazione C del sistema l'unione delle singole configurazioni C_i degli n_C corpi: $C = \cup C_i, i = 1, \dots, n_C$

Il numero di gradi di libertà di un sistema è $n = 3n_C$ nel piano e $n = 6n_C$ nello spazio



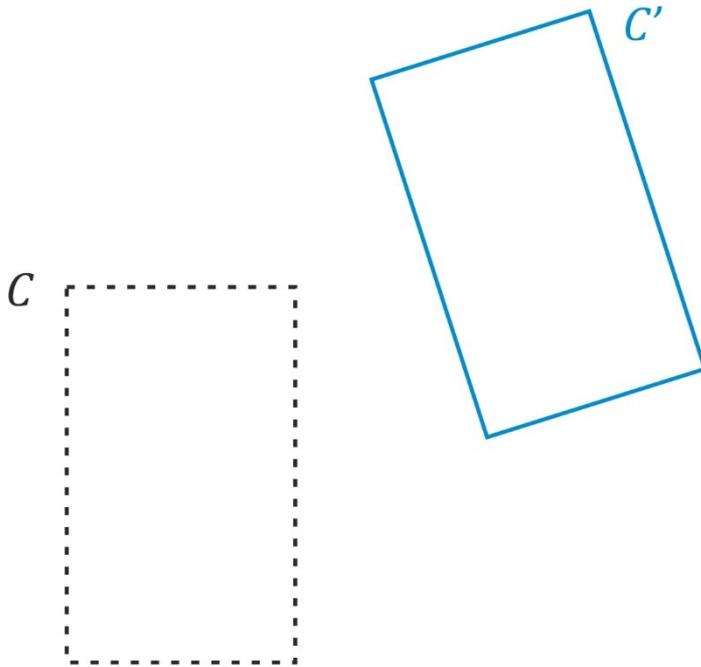
$C_i, i = 1, \dots, 4$

1. Cinematica del corpo rigido

- **Obiettivi**
- **Spostamento rigido**
 - traslazione
 - rotazione
 - rototraslazione
- **Formula Generale dello Spostamento Rigido (FGSR)**
- **I vincoli: prestazioni cinematiche**
- **Il problema cinematico**
- **Classificazione cinematica**
- **Esercizi** (sito: E02-E05, testo: §2.7-2.8)

1. Cinematica del corpo rigido: obiettivi

Obiettivi: Definire per il modello le grandezze fisiche e gli strumenti atti a caratterizzare i cambiamenti di configurazione (da C a C') di un corpo rigido o di un sistema di corpi rigidi



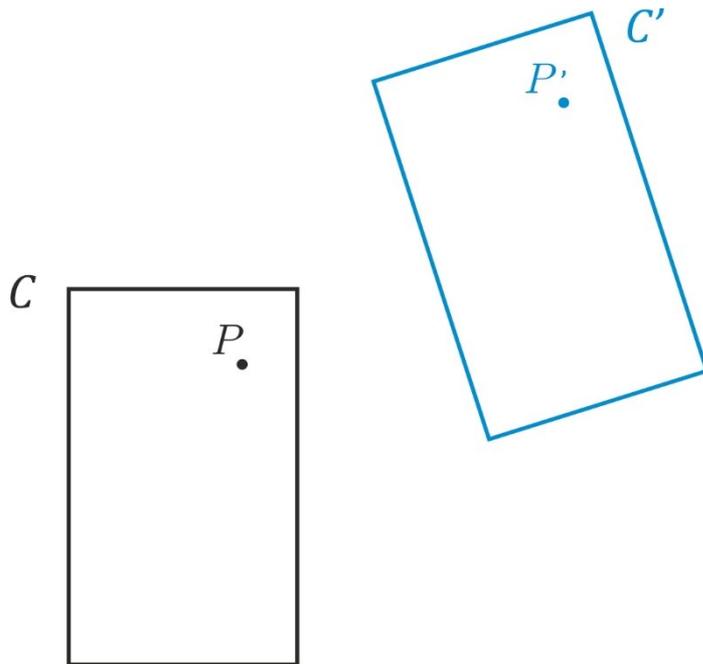
C : configurazione iniziale

C' : configurazione finale

Trasporto f
 $f: C \rightarrow C'$

1. Cinematica del corpo rigido: obiettivi

Obiettivi: Definire per il modello le grandezze fisiche e gli strumenti atti a caratterizzare i cambiamenti di configurazione (da C a C') di un corpo rigido o di un sistema di corpi rigidi



C : configurazione iniziale

C' : configurazione finale

Trasporto f
 $f: C \rightarrow C'$

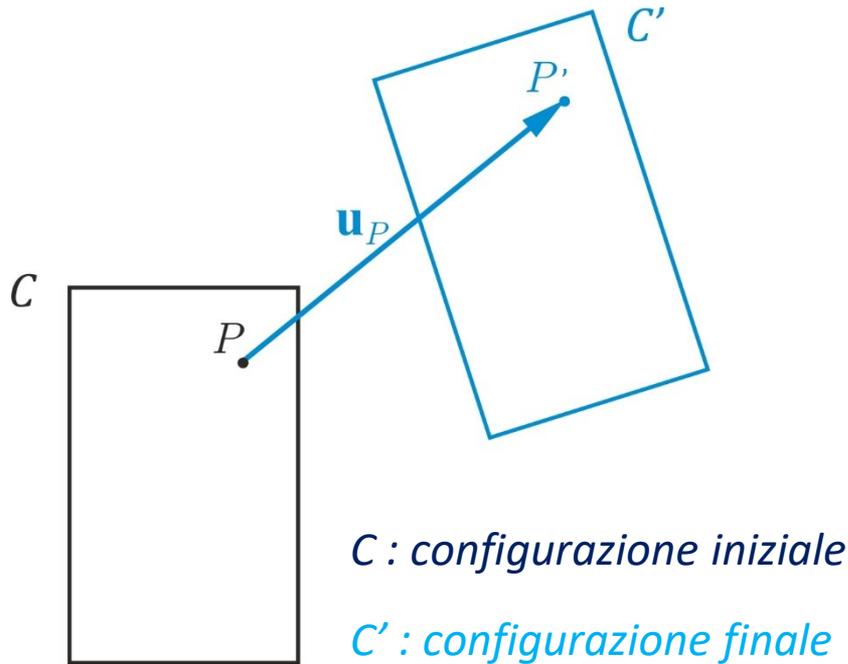
Considerato il generico punto P :

$$P \in C \rightarrow P' \in C'$$

$$P' = f(P)$$

1. Cinematica del corpo rigido: spostamento

Vettore spostamento. Campo di spostamenti: Assegnato un punto $P \in C$, si definisce spostamento \mathbf{u}_P il vettore applicato $\mathbf{u}_P = \mathbf{PP}'$. **Dimensioni fisiche [L]**. Il campo vettoriale definito dallo spostamento di tutti i punti del corpo caratterizza il cambiamento di configurazione da C a C' del corpo rigido



Vettore spostamento

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{PP}' \quad [L]$$

Campo di spostamenti

$$\mathbf{u}_P \quad \forall P \in C$$

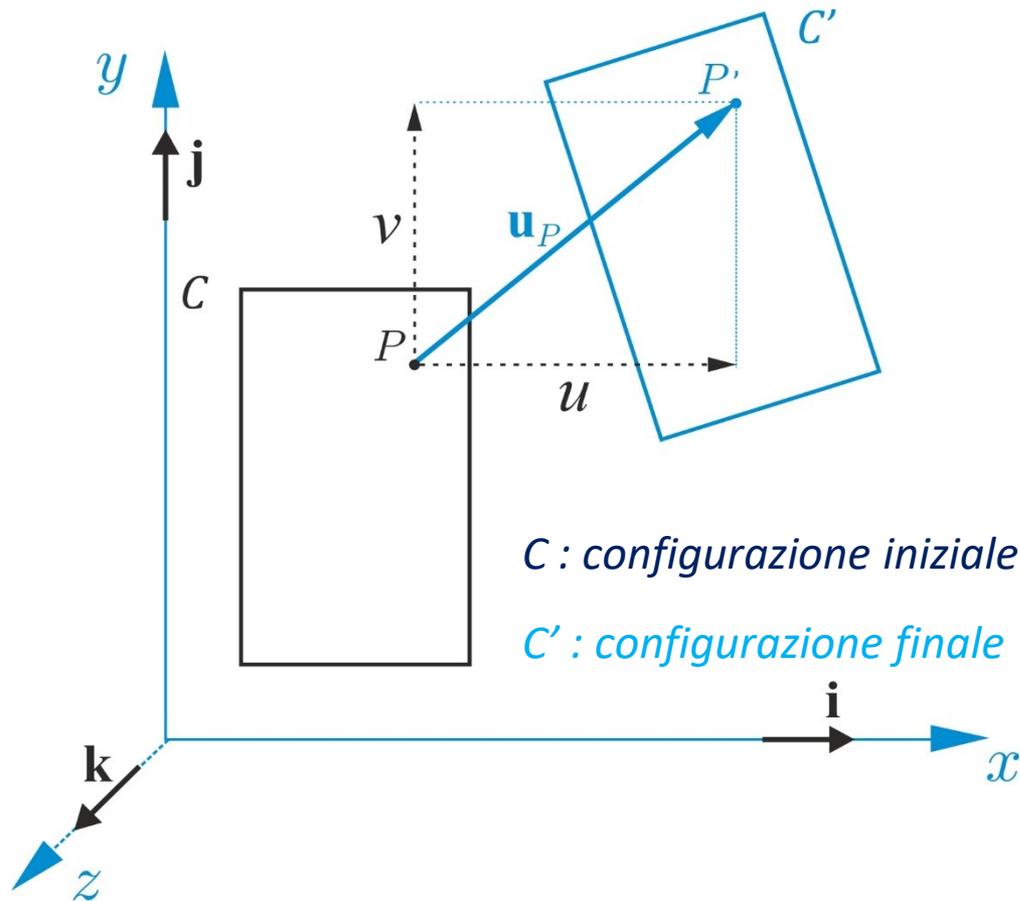
Campo di spostamenti piano

Si ha un campo di spostamenti piano (o semplicemente *spostamento piano*) quando gli spostamenti di tutti i punti hanno direzione parallela ad un unico piano π .

$$\mathbf{u}_P // \pi \quad \forall P \in C$$

1. Cinematica del corpo rigido: spostamento

Componenti cartesiane del vettore spostamento



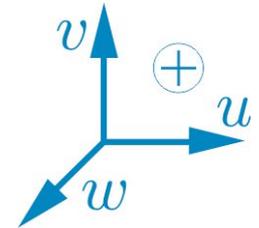
Spazio 3D

Vettore spostamento di $P \equiv (x, y, z)$

$$\mathbf{u}_P = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

Rappresentazione matriciale

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$



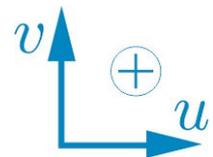
Spostamento piano

Vettore spostamento di $P \equiv (x, y)$

$$\mathbf{u}_P = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$$

Rappresentazione matriciale

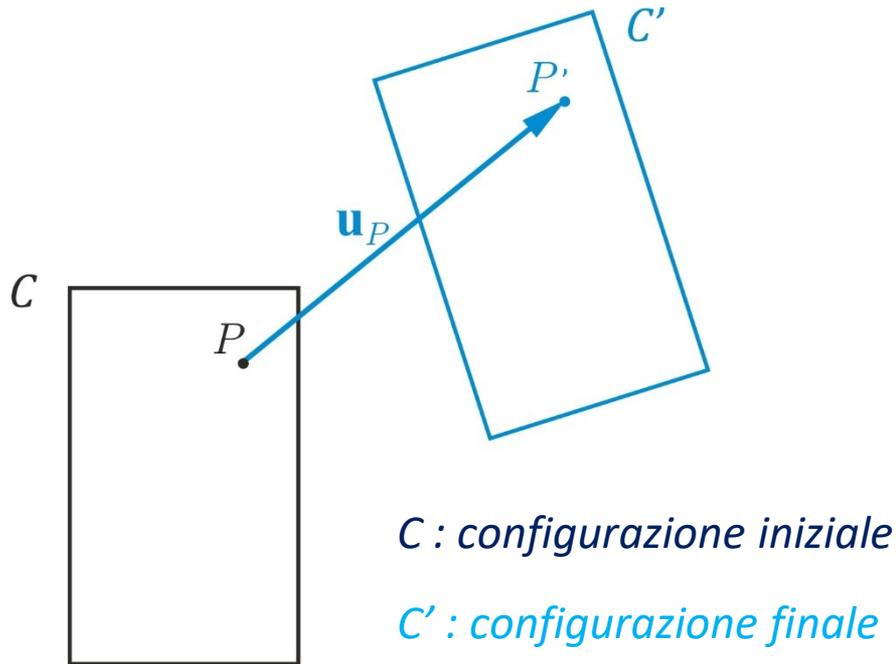
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix}$$



1. Cinematica del corpo rigido: spostamento

Obiettivi: Definire per il modello le grandezze fisiche e gli strumenti atti a caratterizzare i cambiamenti di configurazione (da C a C') di un corpo rigido o di un sistema di corpi rigidi

Per caratterizzare i cambiamenti di configurazione è necessario determinare un'espressione analitica esplicita per la funzione vettoriale $\bar{\mathbf{u}}(P)$ o per le sue componenti scalari $\bar{u}(x, y, z)$, $\bar{v}(x, y, z)$, $\bar{w}(x, y, z)$.



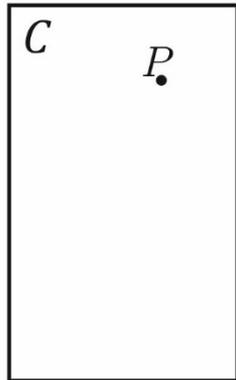
Campo di spostamenti

$$\mathbf{u}_P = \bar{\mathbf{u}}(P) \quad \forall P \in C$$

Componenti scalari dello spostamento

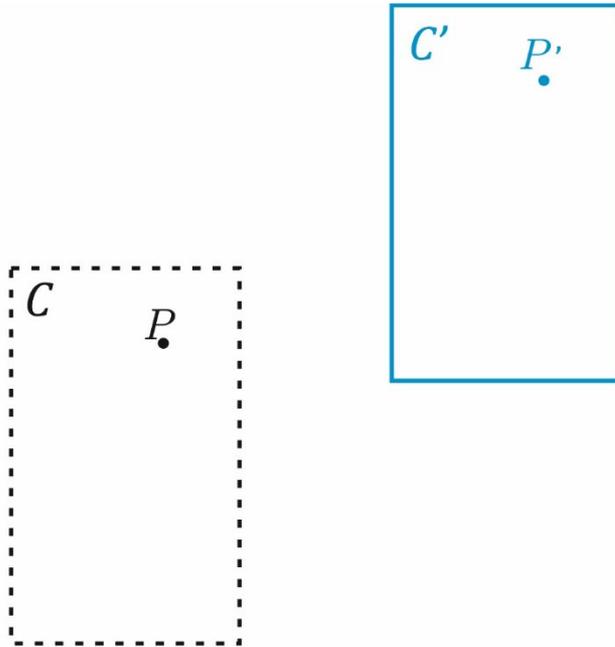
$$\begin{cases} u = \bar{u}(x, y, z) \\ v = \bar{v}(x, y, z) \\ w = \bar{w}(x, y, z) \end{cases}$$

1. Cinematica del corpo rigido: traslazione



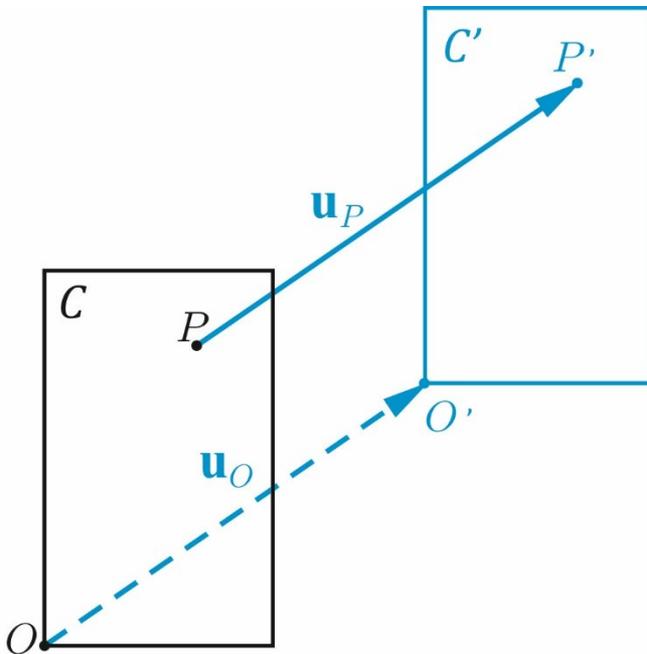
1. Cinematica del corpo rigido: traslazione

Traslazione rigida: si definisce *traslazione* uno spostamento rigido per cui in ogni punto il vettore spostamento ha stessa direzione, verso e intensità. Avendo la stessa direzione tutti gli spostamenti sono paralleli ad un medesimo piano (*spostamento rigido piano*)



1. Cinematica del corpo rigido: traslazione

Traslazione rigida: si definisce *traslazione* uno spostamento rigido per cui in ogni punto il vettore spostamento ha stessa direzione, verso e intensità. Avendo la stessa direzione tutti gli spostamenti sono paralleli ad un medesimo piano (*spostamento rigido piano*)



Campo di spostamenti (forma vettoriale)

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O \quad \forall P \in C$$

\mathbf{u}_O **Vettore traslazione**

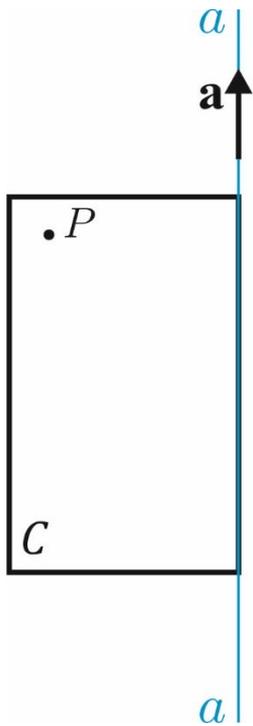
Campo di spostamenti (forma scalare)

$$\begin{cases} u = u_o \\ v = v_o \\ w = w_o \end{cases}$$

Campo di spostamenti (piano xy)

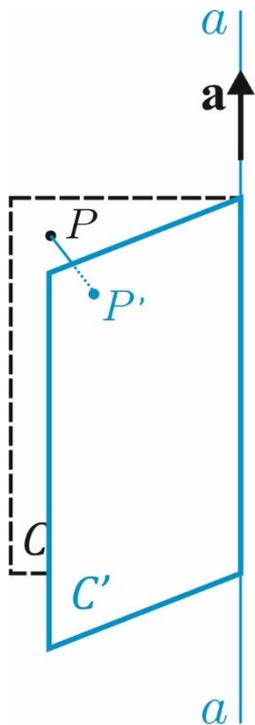
$$\begin{cases} u = u_o \\ v = v_o \end{cases}$$

1. Cinematica del corpo rigido: rotazione



1. Cinematica del corpo rigido: rotazione

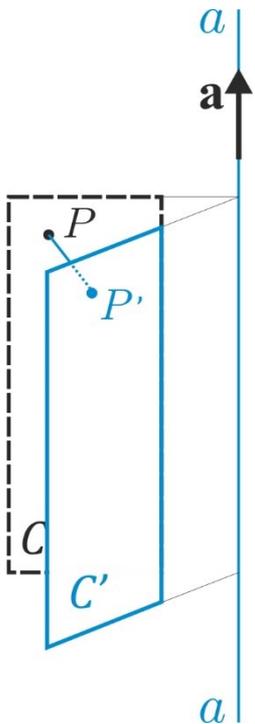
Rotazione rigida: si definisce *rotazione* uno spostamento rigido per cui esiste una retta i cui punti non subiscono spostamenti: tale retta è detta *asse di rotazione* e denotata con a ; fissato un verso arbitrario di percorrenza, si indica con \mathbf{a} il versore dell'asse. Anche la rotazione è uno *spostamento rigido piano* poiché tutti i punti si spostano in piani perpendicolari all'asse a .



a : *asse di rotazione*

1. Cinematica del corpo rigido: rotazione

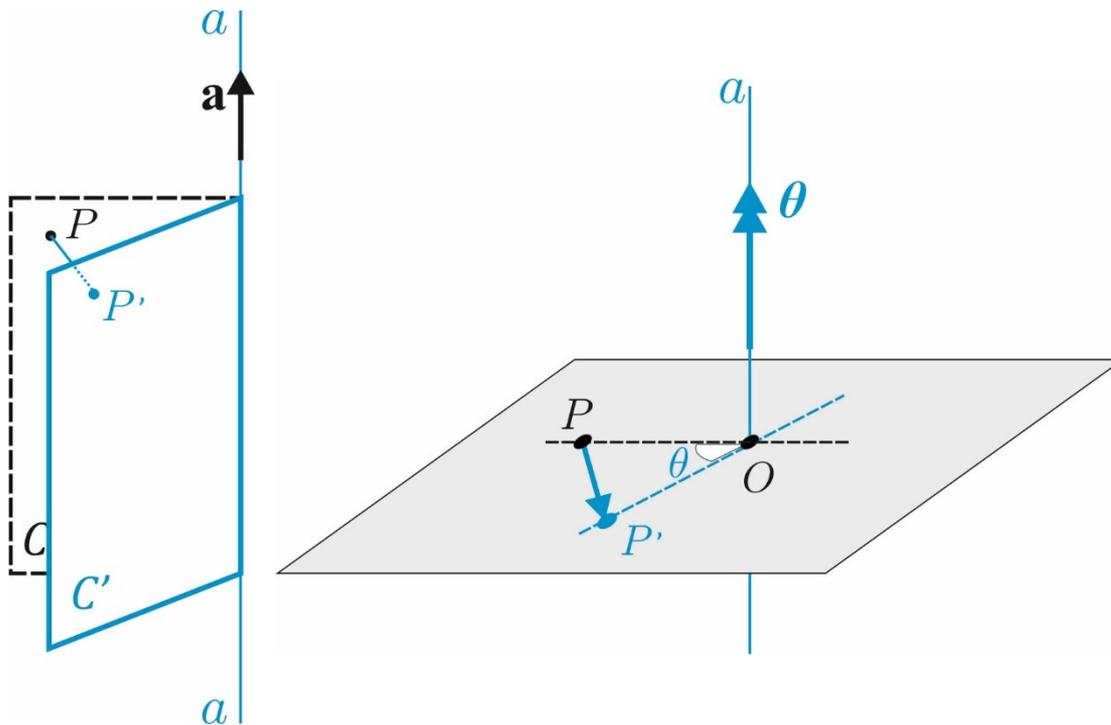
Rotazione rigida: si definisce *rotazione* uno spostamento rigido per cui esiste una retta i cui punti non subiscono spostamenti: tale retta è detta *asse di rotazione* e denotata con a ; fissato un verso arbitrario di percorrenza, si indica con \mathbf{a} il versore dell'asse. Anche la rotazione è uno *spostamento rigido piano* poiché tutti i punti si spostano in piani perpendicolari all'asse a .



a : *asse di rotazione non appartenente al corpo rigido*

1. Cinematica del corpo rigido: rotazione

Rotazione rigida: si definisce *rotazione* uno spostamento rigido per cui esiste una retta i cui punti non subiscono spostamenti: tale retta è detta *asse di rotazione* e denotata con a ; fissato un verso arbitrario di percorrenza, si indica con \mathbf{a} il versore dell'asse. Anche la rotazione è uno *spostamento rigido piano* poiché tutti i punti si spostano in piani perpendicolari all'asse a .



a : asse di rotazione

O : centro di rotazione

Vettore di rotazione (adimensionale)

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{a}$$

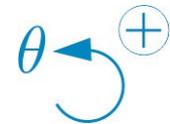
Componenti cartesiane

$$\boldsymbol{\theta} = \theta_x \mathbf{i} + \theta_y \mathbf{j} + \theta_z \mathbf{k}$$

Se l'asse di rotazione coincide con l'asse z :

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{k} \quad \theta_x = \theta_y = 0 \quad \theta_z = \theta$$

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta \end{bmatrix}$$

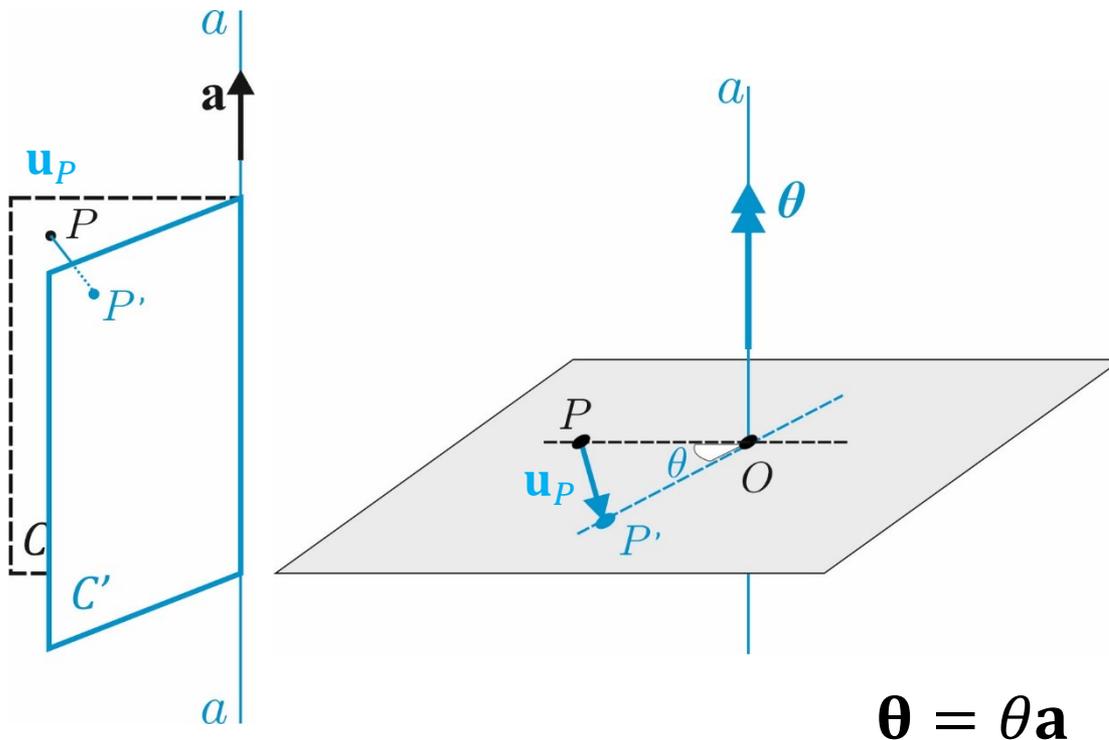


Unità di misura: rad

1. Cinematica del corpo rigido: rotazione

Rotazione rigida: Espressione del campo di spostamenti \mathbf{u}_P

$$\mathbf{u}_P = (\cos \theta - 1)\mathbf{OP} + \sin \theta \mathbf{a} \times \mathbf{OP} \quad \forall P \in C$$



Piccole rotazioni ($\theta \rightarrow 0$)

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1 \quad \cos \theta \cong 1$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad \sin \theta \cong \theta$$

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{a}$$

\mathbf{a} : asse di rotazione

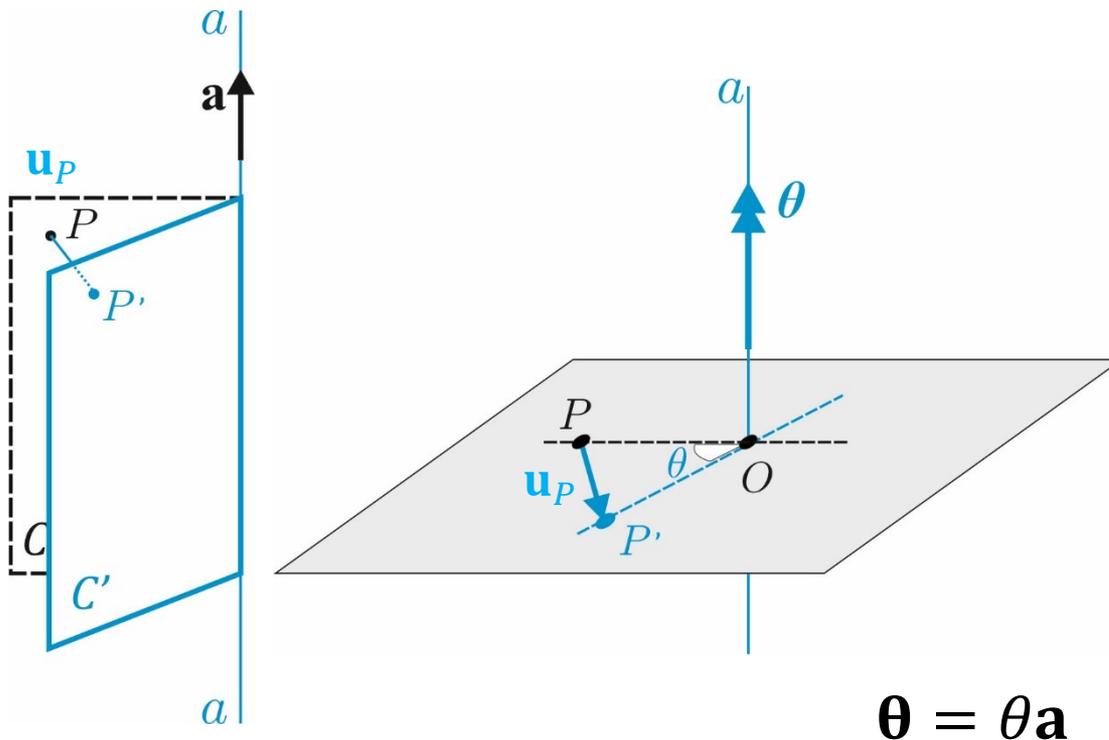
O : centro di rotazione

1. Cinematica del corpo rigido: rotazione

Rotazione rigida: Espressione del campo di spostamenti \mathbf{u}_P se $|\boldsymbol{\theta}| \ll 1 \text{ rad}$

$$\mathbf{u}_P = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

$$\forall P \in C$$



$$\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{a}$$

\mathbf{a} : asse di rotazione

O : centro di rotazione

IPOTESI DEI 'PICCOLI' SPOSTAMENTI

1.

$$\forall P \in C, |\mathbf{u}_P| \ll \ell$$

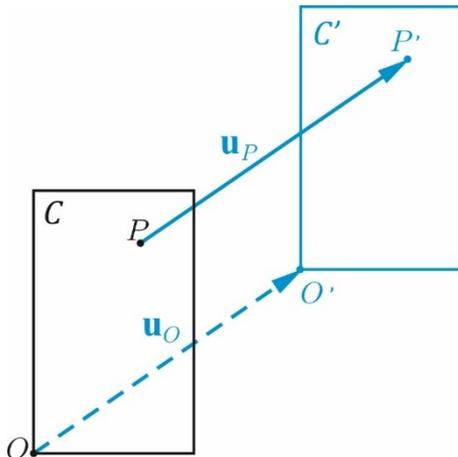
ℓ dimensione caratteristica del corpo

2.

$$|\boldsymbol{\theta}| \ll 1 \text{ rad}$$

Traslazione infinitesima

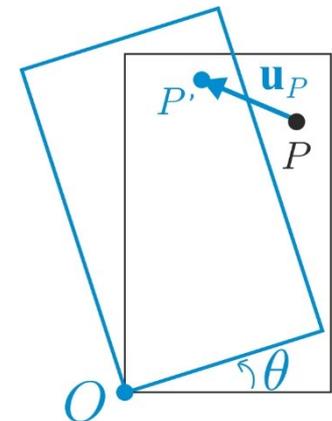
$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O$$



(NB. D'ora in poi per chiarezza, nelle figure non si rispettano le ipotesi dei piccoli spostamenti)

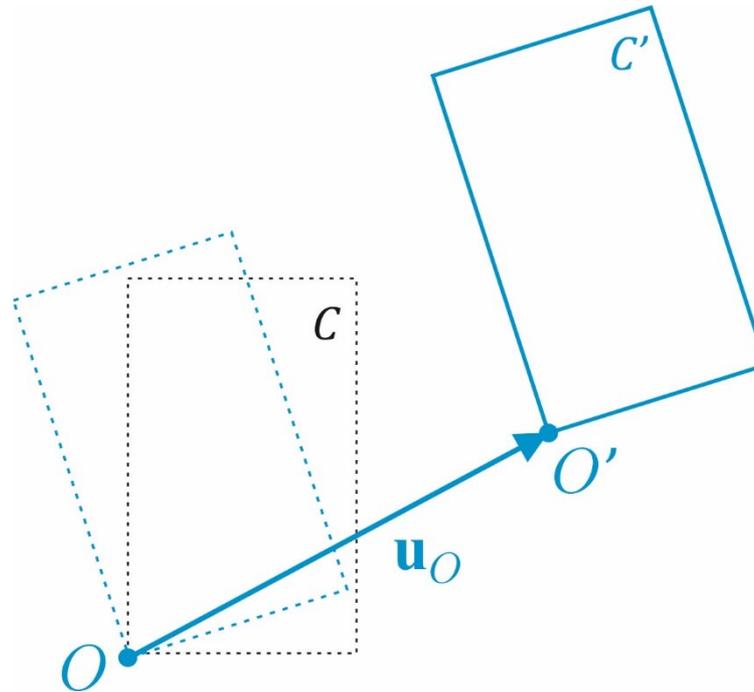
Rotazione infinitesima

$$\mathbf{u}_P = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$



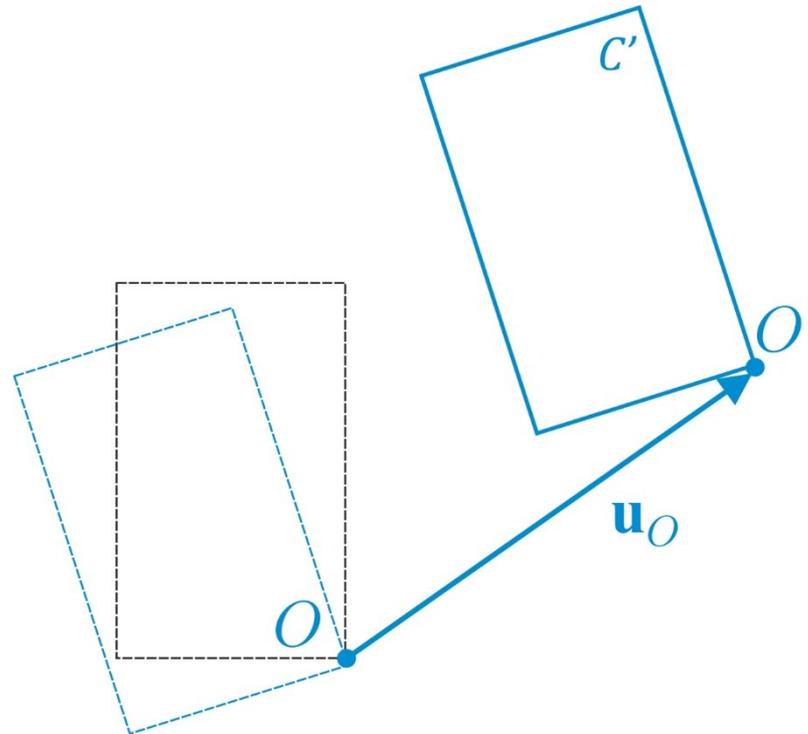
1. Cinematica del corpo rigido: spostamento

Spostamento rigido piano generico.



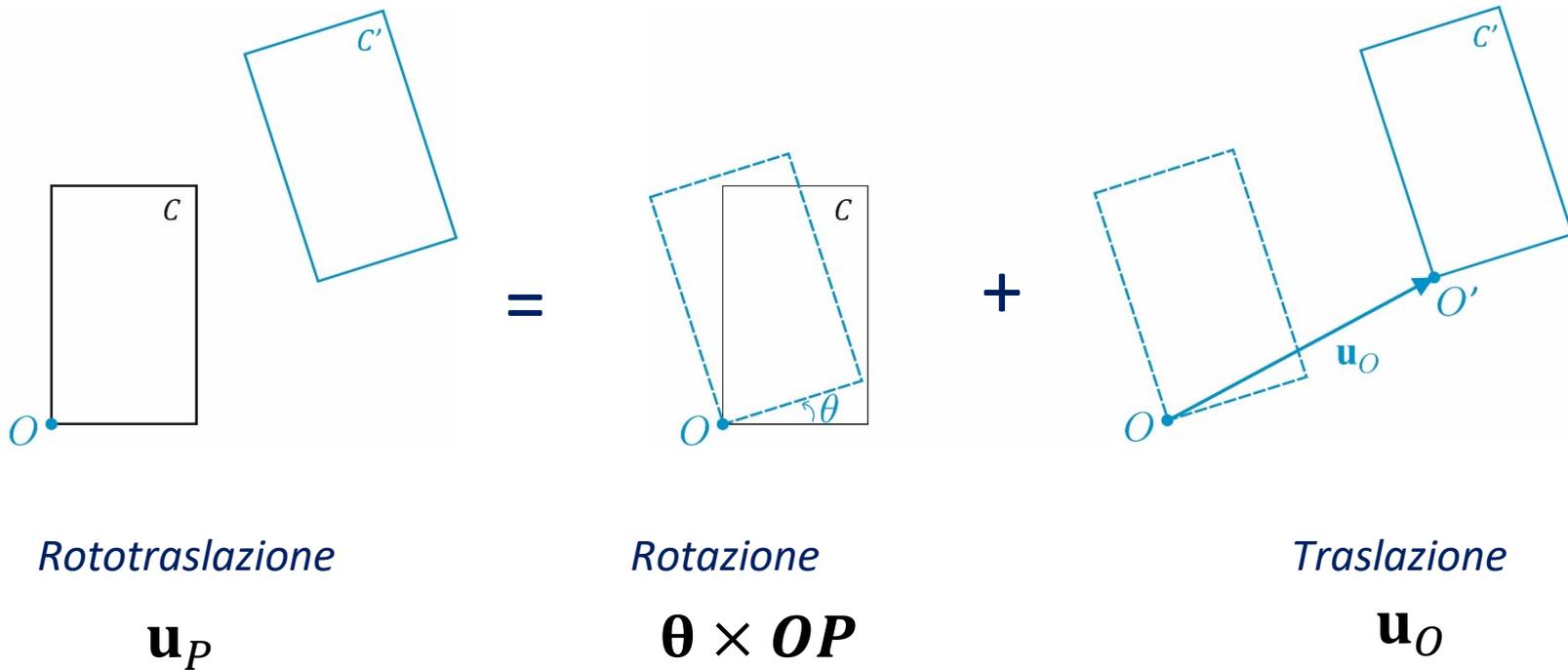
1. Cinematica del corpo rigido: spostamento

Spostamento rigido piano generico (scelta alternativa del punto O).



1. Cinematica del corpo rigido: rototraslazione

Spostamento rigido piano generico. Scelto un punto arbitrario O del corpo, un generico spostamento rigido può essere pensato come la composizione di una rotazione e di una traslazione rigida. Precisamente: a) una rotazione intorno ad O di opportuna ampiezza θ ; b) una traslazione di vettore \mathbf{u}_O . Tale spostamento è chiamato **rototraslazione**.

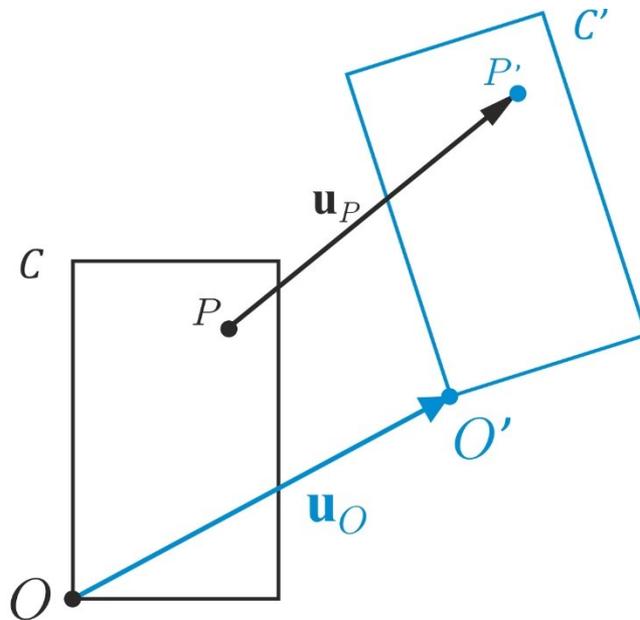


O : polo di riduzione degli spostamenti

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

Formula Generale dello Spostamento Rigido: *forma vettoriale*

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$



\mathbf{u}_P Vettore spostamento del generico punto $P \in C$

O Polo di riduzione degli spostamenti (scelto arbitrariamente)

\mathbf{u}_O Vettore spostamento del polo O

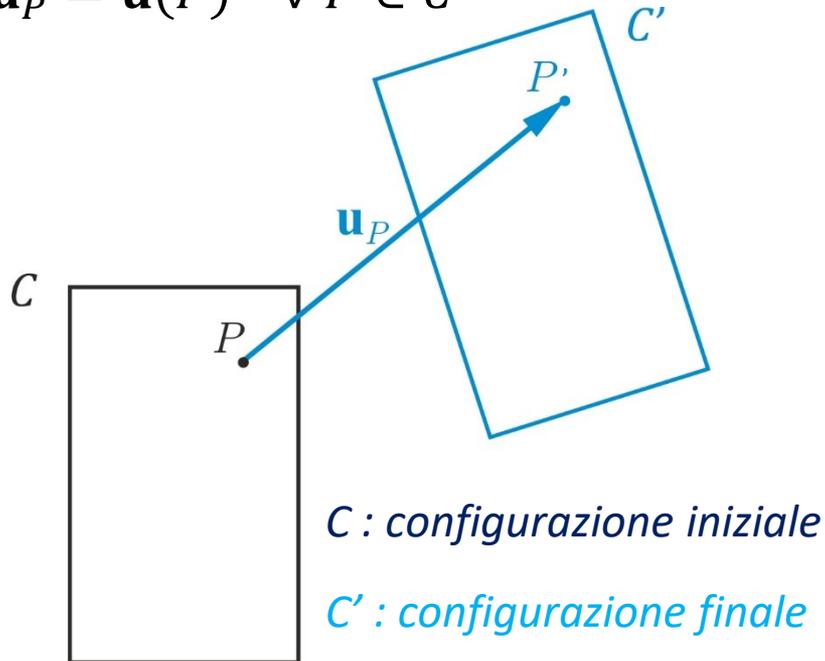
$\boldsymbol{\theta}$ Vettore rotazione intorno a O

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

Importanza e utilità della FGSR

Obiettivi: Definire per il modello le grandezze fisiche e gli strumenti atti a caratterizzare i cambiamenti di configurazione (da C a C') di un corpo rigido o di un sistema di corpi rigidi. Per caratterizzare i cambiamenti di configurazione è necessario determinare un'espressione analitica esplicita per la funzione vettoriale $\bar{\mathbf{u}}(P)$ o per le sue componenti scalari $\bar{u}(x, y, z)$, $\bar{v}(x, y, z)$, $\bar{w}(x, y, z)$.

$$\mathbf{u}_P = \bar{\mathbf{u}}(P) \quad \forall P \in C$$



La FGSR risponde all'obiettivo di esplicitare la funzione $\bar{\mathbf{u}}(P)$, nell'ipotesi dei 'piccoli spostamenti'.

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

FGSR per spostamenti piani: *forma scalare (2D)*

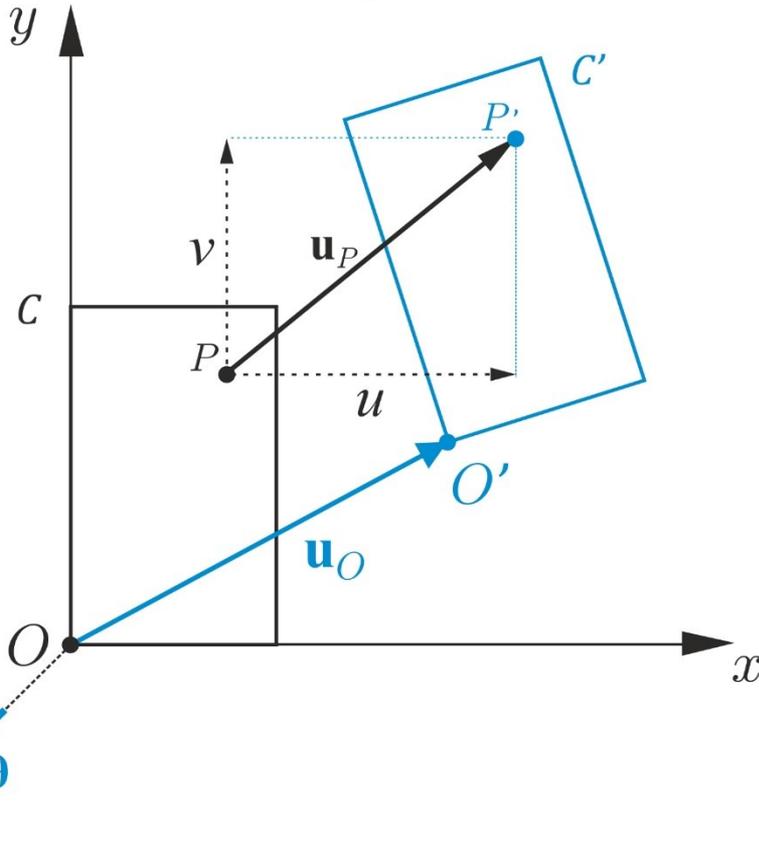
$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

Scegliendo un sistema di riferimento con origine coincidente con il polo O , si ha:

$$O \equiv (0,0,0) \quad \mathbf{u}_P \equiv (u, v, 0) \quad \boldsymbol{\theta} \equiv (0,0,\theta)$$

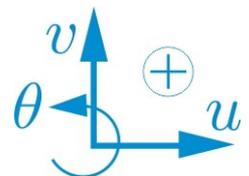
$$P \equiv (x, y, 0) \quad \mathbf{u}_O \equiv (u_0, v_0, 0) \quad \mathbf{OP} \equiv (x, y, 0)$$

$$\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \theta \\ x & y & 0 \end{bmatrix} = -\theta y \mathbf{i} + \theta x \mathbf{j}$$



Componenti scalari rispetto all'asse x

$$u = u_0 - \theta y$$



1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

FGSR per spostamenti piani: *forma scalare (2D)*

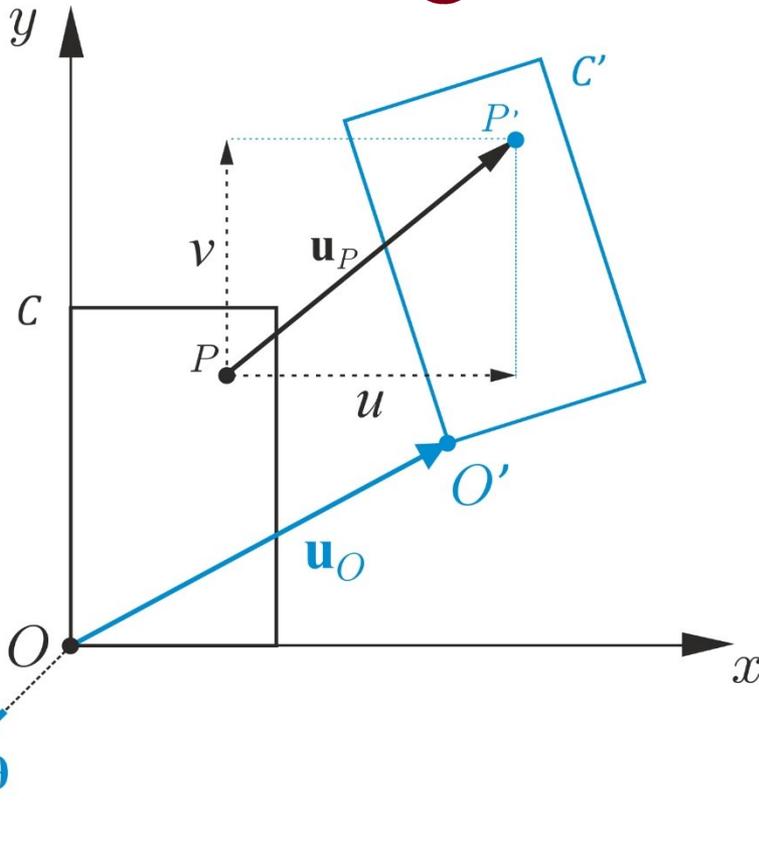
$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

Scegliendo un sistema di riferimento con origine coincidente con il polo O , si ha:

$$O \equiv (0,0,0) \quad \mathbf{u}_P \equiv (u, v, 0) \quad \boldsymbol{\theta} \equiv (0,0,\theta)$$

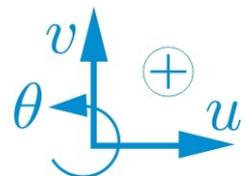
$$P \equiv (x, y, 0) \quad \mathbf{u}_O \equiv (u_0, v_0, 0) \quad \mathbf{OP} \equiv (x, y, 0)$$

$$\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \theta \\ x & y & 0 \end{bmatrix} = -\theta y \mathbf{i} + \theta x \mathbf{j}$$



Componenti scalari rispetto all'asse y

$$v = v_0 + \theta x$$



1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

FGSR per spostamenti piani: *forma scalare (2D)*

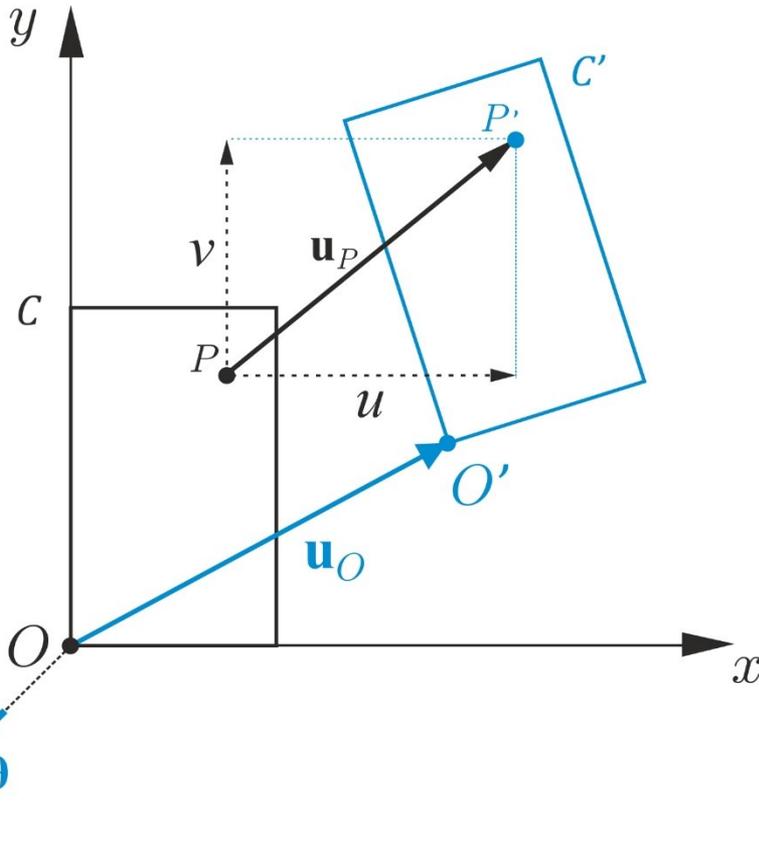
$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

Scegliendo un sistema di riferimento con origine coincidente con il polo O , si ha:

$$O \equiv (0,0,0) \quad \mathbf{u}_P \equiv (u, v, 0) \quad \boldsymbol{\theta} \equiv (0,0,\theta)$$

$$P \equiv (x, y, 0) \quad \mathbf{u}_O \equiv (u_0, v_0, 0) \quad \mathbf{OP} \equiv (x, y, 0)$$

$$\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \theta \\ x & y & 0 \end{bmatrix} = -\theta y \mathbf{i} + \theta x \mathbf{j}$$



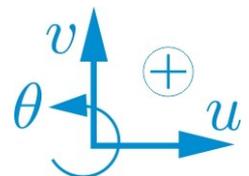
FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_0 - \theta y \\ v = v_0 + \theta x \end{cases}$$

(origine coincidente con il polo)

Parametri lagrangiani dello spostamento

$$u_0, v_0, \theta$$



1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

FGSR per spostamenti piani: *forma matriciale (2D)*

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_0 - \theta y \\ v = v_0 + \theta x \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & x \\ & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

FGSR per spostamenti piani: *forma matriciale (2D)*

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_0 - \theta y \\ v = v_0 + \theta x \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
u = **u₀** + **Ω_R** **x**

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{\Omega}_R \mathbf{x}$$

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

FGSR per spostamenti piani: *forma matriciale (2D)*

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_0 - \theta y \\ v = v_0 + \theta x \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$

*Tensore della rotazione rigida
(emisimmetrico)*

$$\boldsymbol{\Omega}_R = \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Omega}_R = -\boldsymbol{\Omega}_R^T$$

Vettore degli spostamenti generalizzati

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3 \times 1)$$

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

FGSR per spostamenti piani: *riepilogo*

FGSR in forma vettoriale

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

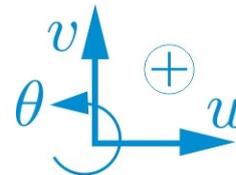
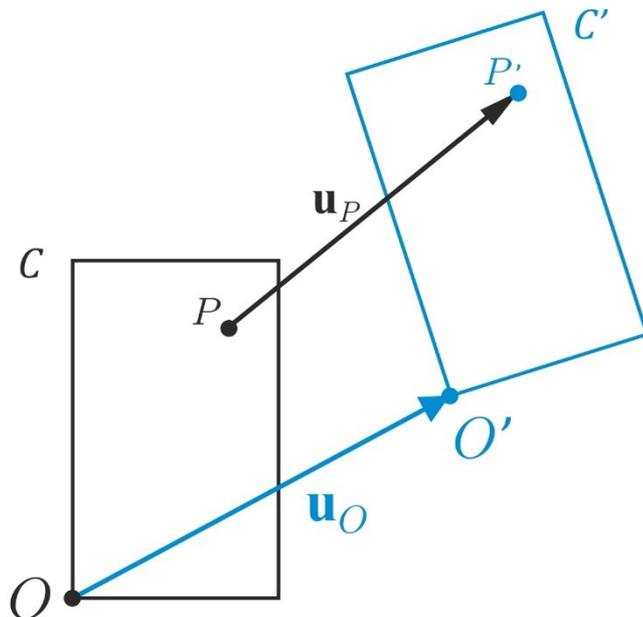
FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O - \theta y \\ v = v_O + \theta x \end{cases}$$

(origine coincidente con il polo)

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$



Vettore degli spostamenti generalizzati

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_O \\ v_O \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3 \times 1)$$

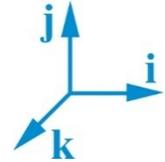
Numero di g.d.l.: $n = 3$

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

Formula Generale dello Spostamento Rigido: *forma scalare (3D)*

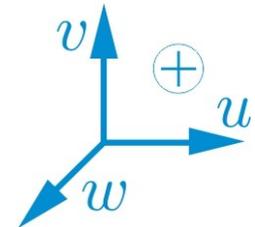
Si sceglie un sistema di riferimento con origine coincidente con il polo O.



Componenti scalari dei vettori che compaiono nella FGSR

$$\mathbf{u}_P = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}, \quad \mathbf{u}_O = u_O\mathbf{i} + v_O\mathbf{j} + w_O\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \theta_x\mathbf{i} + \theta_y\mathbf{j} + \theta_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$



$$\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\theta_y z - \theta_z y)\mathbf{i} + (\theta_z x - \theta_x z)\mathbf{j} + (\theta_x y - \theta_y x)\mathbf{k}$$

Componenti scalari rispetto all'asse x

$$u = u_O - \theta_z y + \theta_y z$$

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

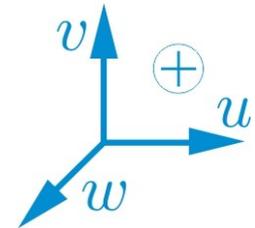
Formula Generale dello Spostamento Rigido: *forma scalare (3D)*

Si sceglie un sistema di riferimento con origine coincidente con il polo O.

Componenti scalari dei vettori che compaiono nella FGSR

$$\mathbf{u}_P = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}, \quad \mathbf{u}_O = u_O\mathbf{i} + v_O\mathbf{j} + w_O\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \theta_x\mathbf{i} + \theta_y\mathbf{j} + \theta_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$



$$\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\theta_y z - \theta_z y)\mathbf{i} + (\theta_z x - \theta_x z)\mathbf{j} + (\theta_x y - \theta_y x)\mathbf{k}$$

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O + \theta_y z - \theta_z y \\ v = v_O + \theta_z x - \theta_x z \\ w = w_O - \theta_y x + \theta_x y \end{cases}$$

Parametri lagrangiani dello spostamento

$$u_O, v_O, w_O, \theta_x, \theta_y, \theta_z$$

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

Formula Generale dello Spostamento Rigido: *forma matriciale (3D)*

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_0 + \theta_y z - \theta_z y \\ v = v_0 + \theta_z x - \theta_x z \\ w = w_0 - \theta_y x + \theta_x y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y & z \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

Formula Generale dello Spostamento Rigido: *forma matriciale (3D)*

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O + \theta_y z - \theta_z y \\ v = v_O + \theta_z x - \theta_x z \\ w = w_O - \theta_y x + \theta_x y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_O \\ v_O \\ w_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
u = **u_O** + **Ω_R** **x**

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \mathbf{\Omega}_R \mathbf{x}$$

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

Formula Generale dello Spostamento Rigido: *forma matriciale (3D)*

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O + \theta_y z - \theta_z y \\ v = v_O + \theta_z x - \theta_x z \\ w = w_O - \theta_y x + \theta_x y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_O \\ v_O \\ w_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$

*Tensore della rotazione rigida
(emisimmetrico)*

$$\boldsymbol{\Omega}_R = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Omega}_R = -\boldsymbol{\Omega}_R^T$$

Vettore degli spostamenti generalizzati

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_O \\ v_O \\ w_O \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (6 \times 1)$$

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

OSSERVAZIONI (caso piano)

FGSR in forma vettoriale

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O - \theta y \\ v = v_O + \theta x \end{cases}$$

(origine coincidente con il polo)

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$

Osservazione 1

Se in uno spostamento rigido è nulla la rotazione ($\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$), allora dalla FGSR si ha:

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O$$

che è l'equazione della traslazione rigida.

La traslazione rigida si può dunque interpretare come uno spostamento rigido ad ampiezza di rotazione nulla.

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

OSSERVAZIONI (caso piano)

FGSR in forma vettoriale

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O - \theta y \\ v = v_O + \theta x \end{cases}$$

(origine coincidente con il polo)

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$

Osservazione 2

Guardando la forma scalare Eq. (2), si osserva che il punto del piano di coordinate

$$x = -\frac{v_o}{\theta}, \quad y = \frac{u_o}{\theta}$$

non si sposta. Infatti sostituendo le precedenti equazioni nella Eq. (2) si ottiene $u = 0$, $v = 0$.

Poiché non subisce spostamenti, tale punto è per definizione un centro di rotazione.

Se ne deduce che ogni generico spostamento piano (infinitesimo) è riconducibile ad una rotazione rigida intorno al punto C_R di coordinate $x_{CR} = -\frac{v_o}{\theta}$ e $y_{CR} = \frac{u_o}{\theta}$.

*Il punto C_R è detto **centro assoluto di rotazione** o semplicemente **centro di rotazione**.*

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

OSSERVAZIONI (caso piano)

FGSR in forma vettoriale

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O - \theta y \\ v = v_O + \theta x \end{cases}$$

(origine coincidente con il polo)

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$

Osservazione 3

In caso di traslazione rigida, per l'osservazione 1 è $\theta = 0$. Quindi, per l'osservazione 2 ($x_{CR} = -\frac{v_O}{\theta}, y_{CR} = \frac{u_O}{\theta}$), risulta:

$$x_{CR} \rightarrow \infty, y_{CR} \rightarrow \infty$$

La traslazione rigida è dunque riconducibile a una rotazione rigida ad ampiezza nulla, il cui centro di rotazione è un punto improprio del piano.

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

OSSERVAZIONI (caso piano)

FGSR in forma vettoriale

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_0 - \theta y \\ v = v_0 + \theta x \end{cases}$$

(origine coincidente con il polo)

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$

Osservazione 4

Si ha un campo di spostamenti nullo ($\mathbf{u}_P = \mathbf{0} \forall P \in C$) se e solo se $\mathbf{u}_O = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$

cioè se e solo se sono identicamente **nulli** i parametri lagrangiani dello spostamento u_0, v_0, θ

e quindi se e solo se è **nullo** il vettore degli spostamenti generalizzati $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{bmatrix}$

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

FGSR per spostamenti piani: *riepilogo*

FGSR in forma vettoriale

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

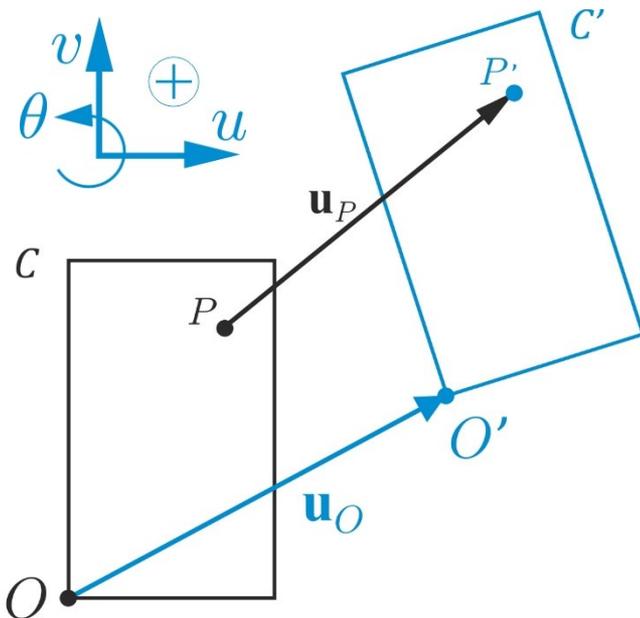
FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_0 - \theta y \\ v = v_0 + \theta x \end{cases}$$

(origine coincidente con il polo)

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$



Vettore spostamenti
generalizzati

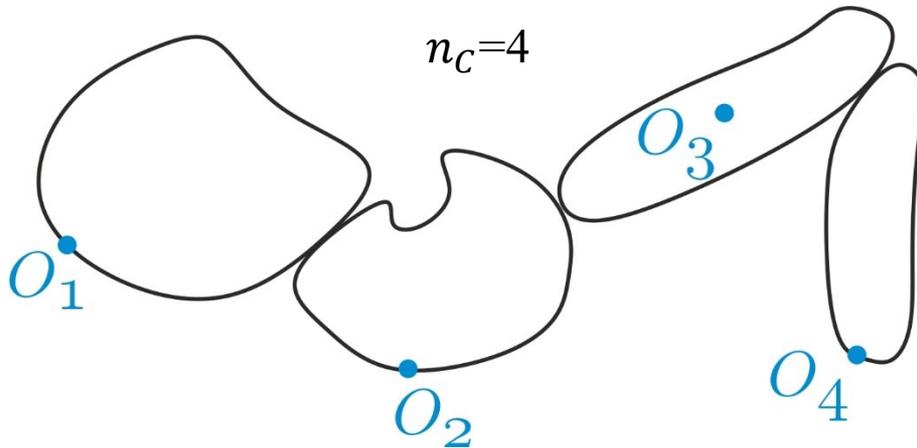
$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3 \times 1)$$

Numero di g.d.l.: $n = 3$

Ogni generico spostamento piano (infinitesimo) è riconducibile ad una rotazione rigida intorno ad un punto C_R detto centro assoluto di rotazione

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR (sistemi)

Sistemi di corpi rigidi, spostamenti piani. Si estende la trattazione fatta al caso di sistemi di n_C corpi rigidi



FGSR in forma vettoriale

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_{O_i} + \boldsymbol{\theta}_i \times \mathbf{O}_i P$$

$$P \in C_i \quad i = 1, \dots, n_C$$

\mathbf{O}_i - Polo di riduzione degli spostamenti scelto arbitrariamente (uno per ogni corpo)

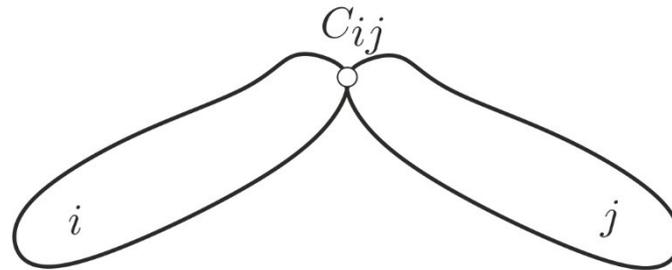
Vettore degli spostamenti generalizzati

$$\mathbf{q} = [u_{O1} \quad v_{O1} \quad \theta_1, u_{O2} \quad v_{O2} \quad \theta_2, \dots, u_{Onc} \quad v_{Onc} \quad \theta_{nc}]^T$$

Il vettore \mathbf{q} ha dimensioni $3n_C \times 1$, dove $n = 3n_C$ è il numero di gradi di libertà del sistema

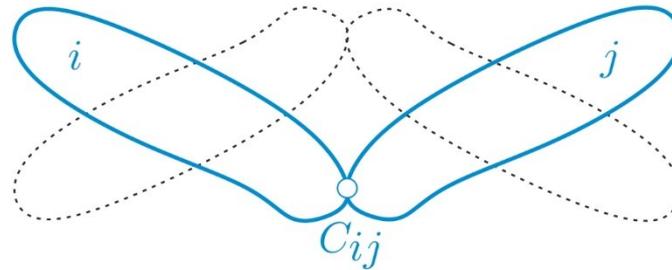
1. Cinematica del corpo rigido: FGSR (sistemi)

Sistemi di corpi rigidi, centro rotazione relativa. Presi due *corpi* i e j di un sistema si definisce centro di rotazione relativa o semplicemente *centro relativo* C_{ij} il punto attorno a cui un osservatore solidale al corpo i vede ruotare il corpo j o viceversa.



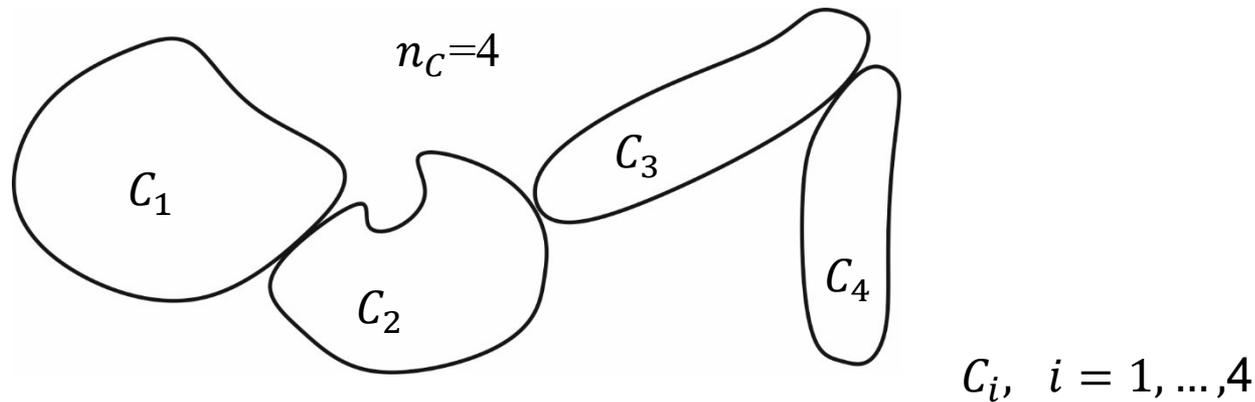
1. Cinematica del corpo rigido: FGSR (sistemi)

Sistemi di corpi rigidi, centro rotazione relativa. Presi due *corpi* i e j di un sistema si definisce centro di rotazione relativa o semplicemente *centro relativo* C_{ij} il punto attorno a cui un osservatore solidale al corpo i vede ruotare il corpo j o viceversa.



1. Cinematica del corpo rigido: spostamenti piani

Sistemi di corpi rigidi, spostamenti piani.



Osservazione. Se un sistema di corpi rigidi si sposta nel piano, nell'ipotesi di piccoli spostamenti allora:

- ogni corpo che non rimane fermo *ruota rigidamente* attorno ad un centro di rotazione assoluto C_{Ri} (eventualmente improprio in caso di corpo che trasla).
- Per ogni coppia di corpi i e j esiste un *centro relativo* C_{ij} definito come sopra.