Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

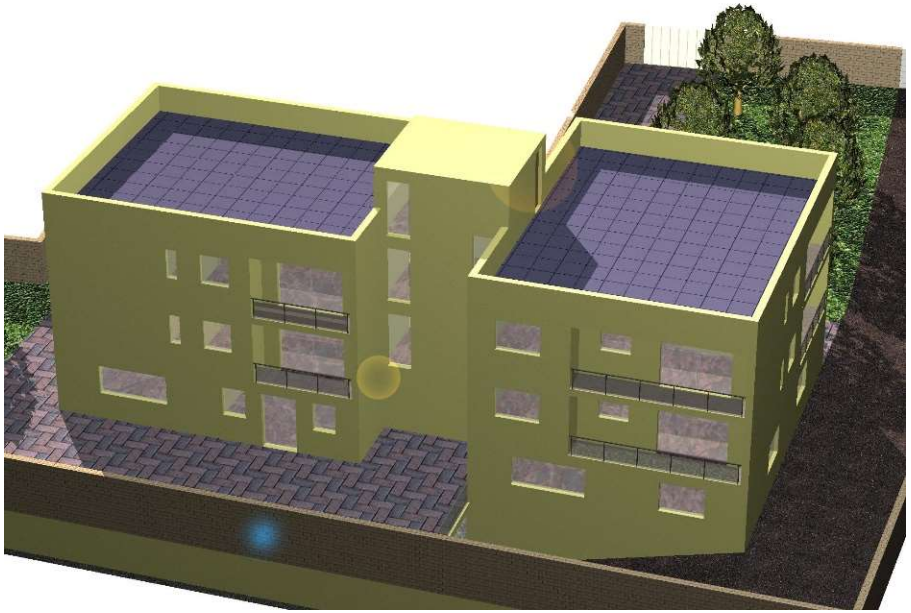
E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

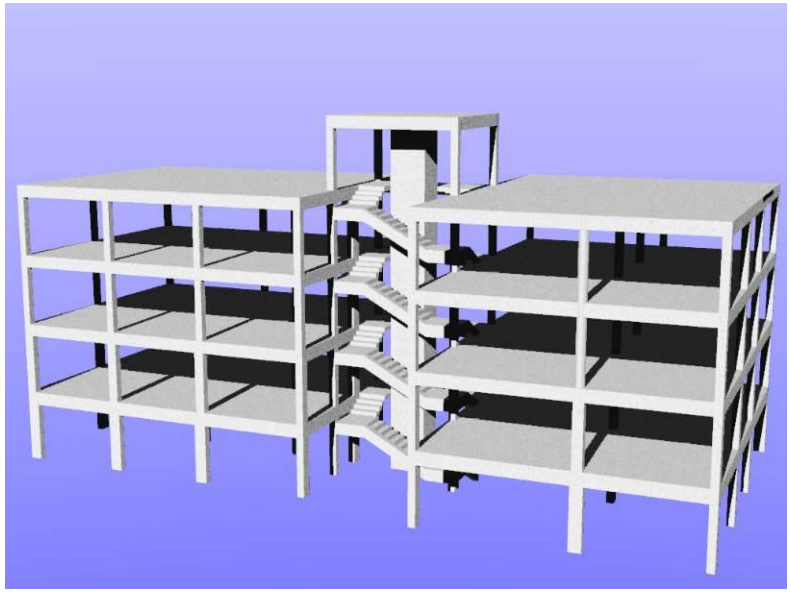
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

2.1 Parole chiave

Struttura portante: insieme degli elementi strutturali e dei vincoli: ha il compito di rispondere alle azioni esterne in modo che la costruzione nel suo complesso possa svolgere in modo adeguato le funzioni per le quali è stata realizzata



Costruzione



Struttura portante

2.1 Parole chiave

Analisi strutturale: analisi e caratterizzazione della *risposta strutturale* cioè del comportamento meccanico manifestato dalla struttura in risposta alle azioni esterne.

Azioni Esterne → **Struttura** → **Risposta Strutturale**

- forze esterne,
- variazioni termiche,
- cedimenti vincolari,

etc.

- geometria,
- materiali costitutivi,
- condizioni di vincolo,

etc.

INCOGNITE

- spostamenti, deformazioni
- forze interne, tensioni

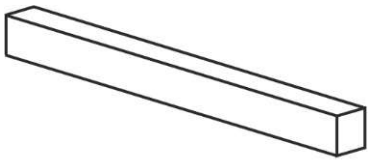
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

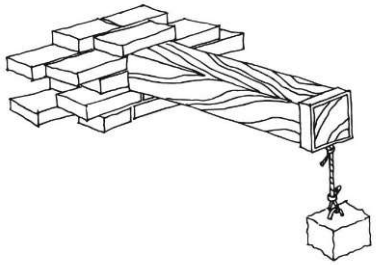
Lezione

Parte II - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni

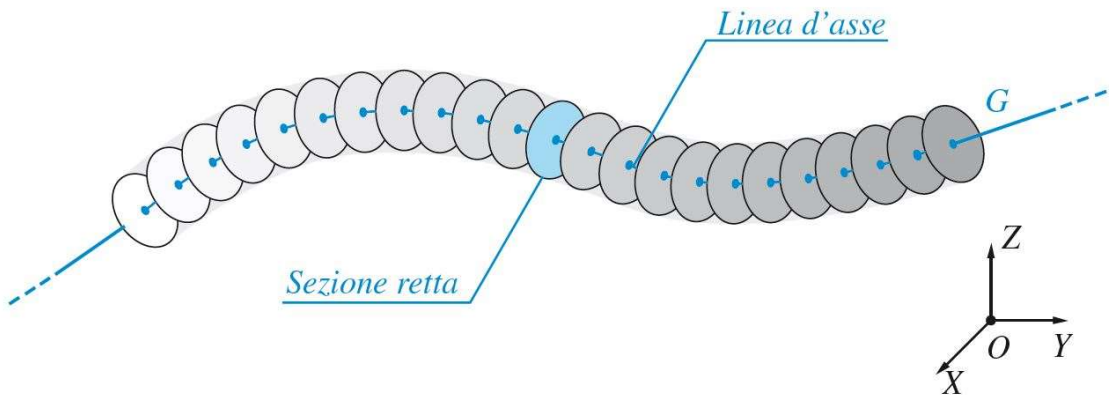
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



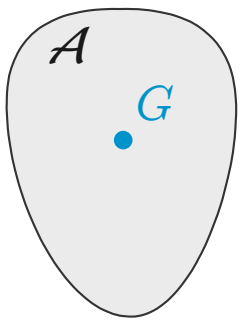


Il modello di trave elastica 1D

Geometria della trave 1D: dal punto di vista geometrico la trave è un solido *continuo* tridimensionale di forma allungata generato da una figura piana (*sezione*) che trasla nello spazio mantenendosi perpendicolare alla traiettoria descritta dal proprio baricentro G (*linea d'asse*).



Elementi caratteristici

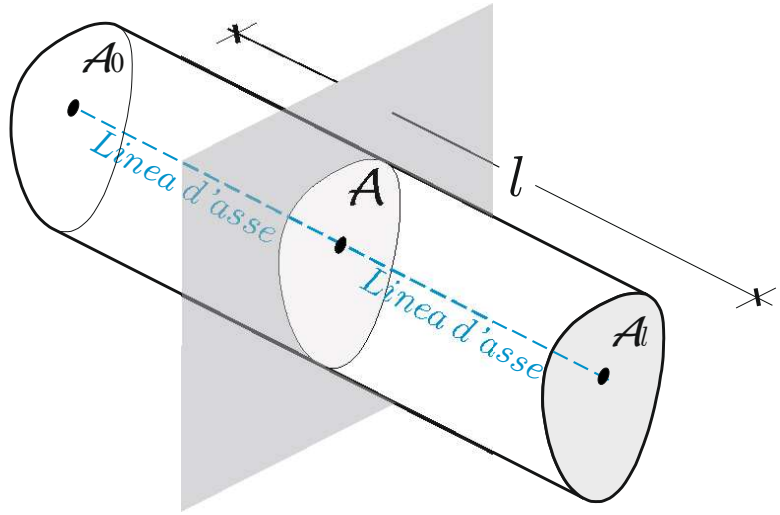


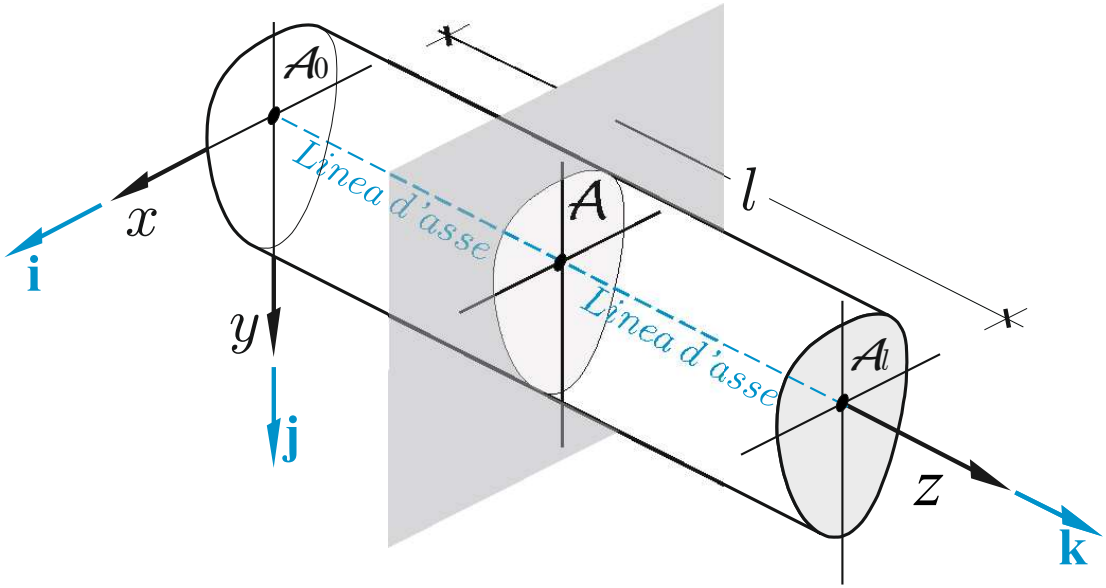
1. Sezione retta: figura piana che genera il solido, dimensione caratteristica D.

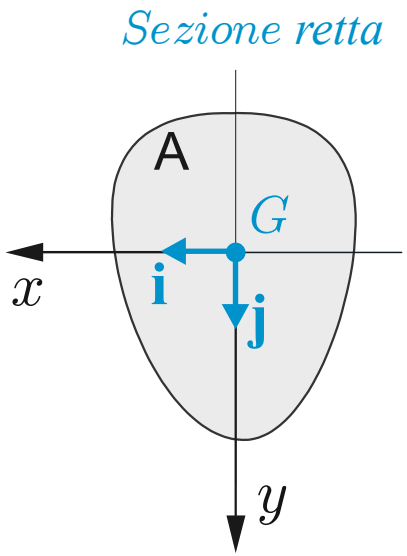
2. Linea d'asse: lunghezza l ($l \gg D$)

Trave ad asse rettilineo

Sistema di riferimento locale

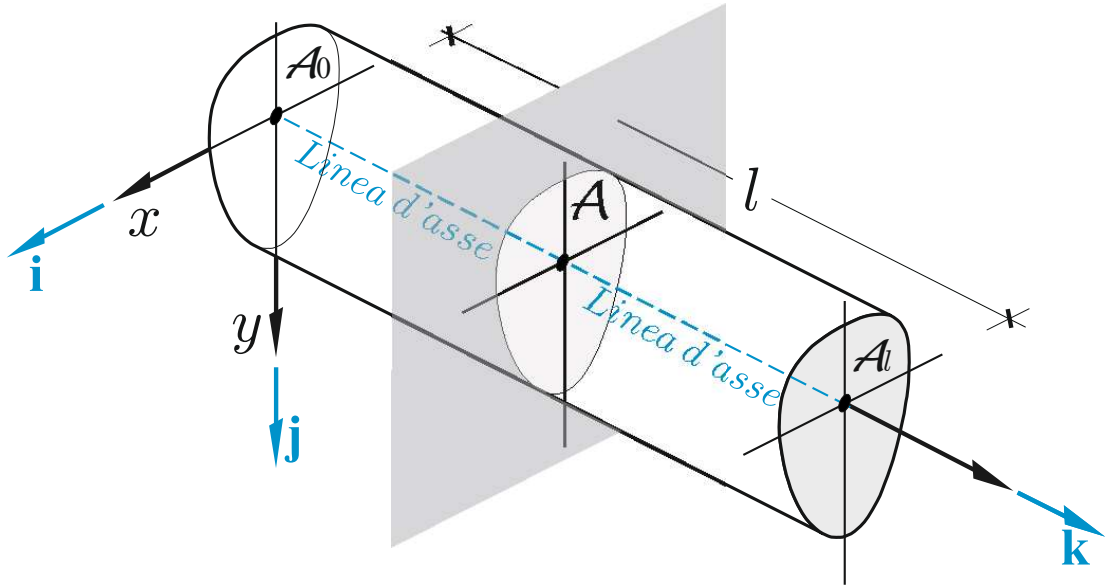


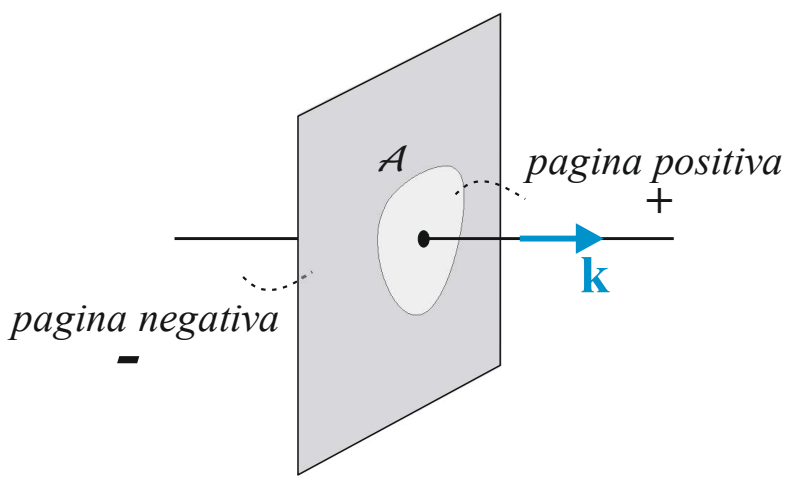




Trave ad asse rettilineo

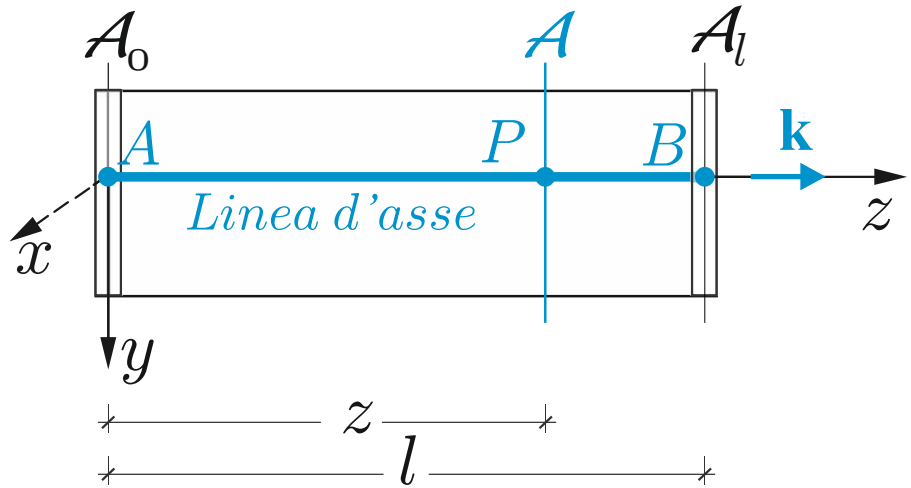
Orientazione delle sezioni





Trave ad asse rettilineo

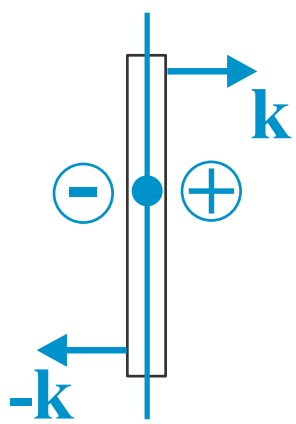
Vista piano zy



$$0 \leq z \leq l$$

$$z = 0 \;\Rightarrow\; P \equiv A$$
$$z = l \;\Rightarrow\; P \equiv B$$

Orientazione delle sezioni

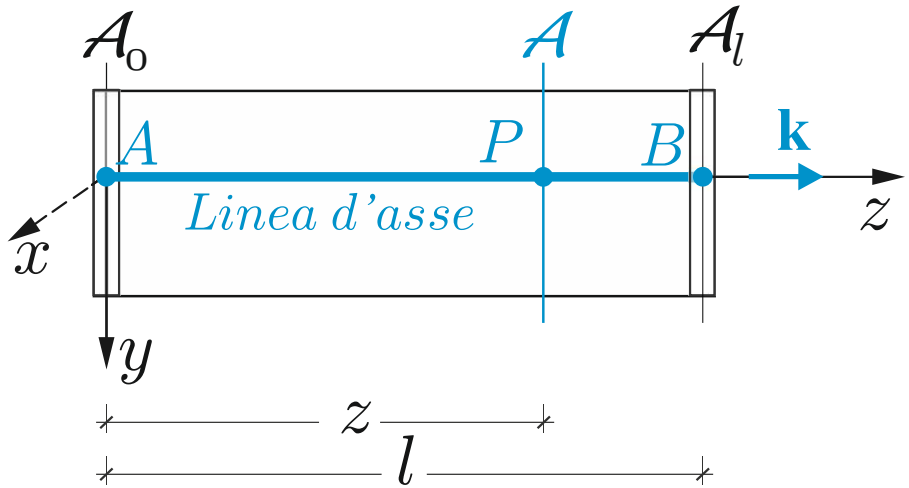


$$0 \leq z \leq l$$

$$z = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{A}_0^-$$
$$z = l \;\Rightarrow\; \mathcal{A}_l^+$$

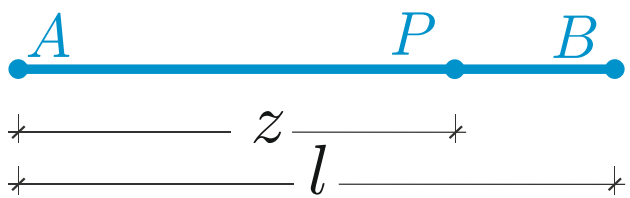
Trave ad asse rettilineo

Vista piano zy



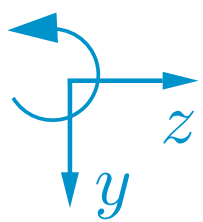
$$0 \leq z \leq l$$

$$z = 0 \;\Rightarrow \mathcal{A}_0^-$$
$$z = l \;\Rightarrow \mathcal{A}_l^+$$



$$0 \leq z \leq l$$

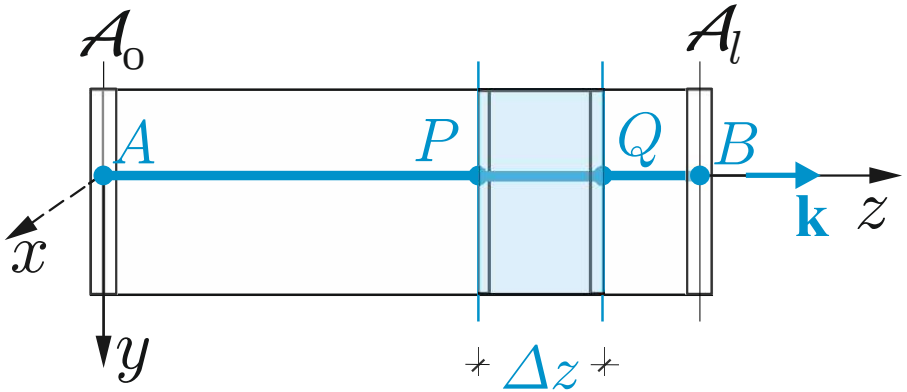
$$z = 0 \;\Rightarrow\; P \equiv A$$
$$z = l \;\Rightarrow\; P \equiv B$$

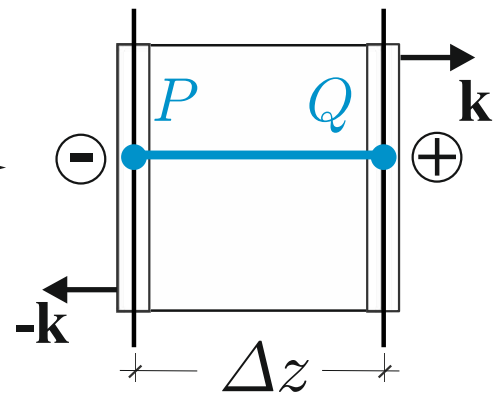


Trave ad asse rettilineo

Elemento di trave

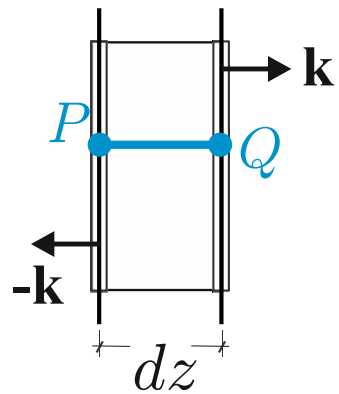
$P \equiv z,$
$Q \equiv z + \Delta z$



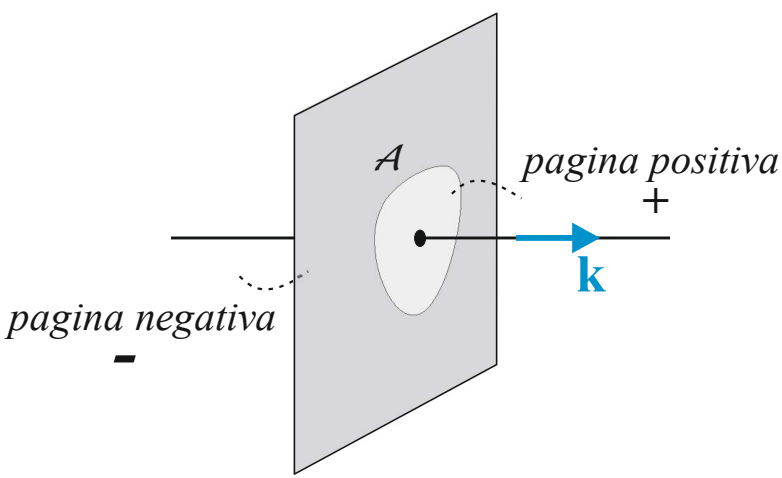


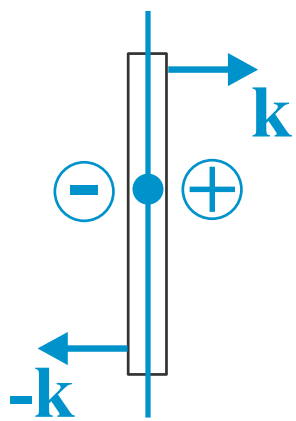
Elemento infinitesimo (concio)

$P \equiv z,$
$Q \equiv z + \mathrm{d}z$



NB Orientazione sezione





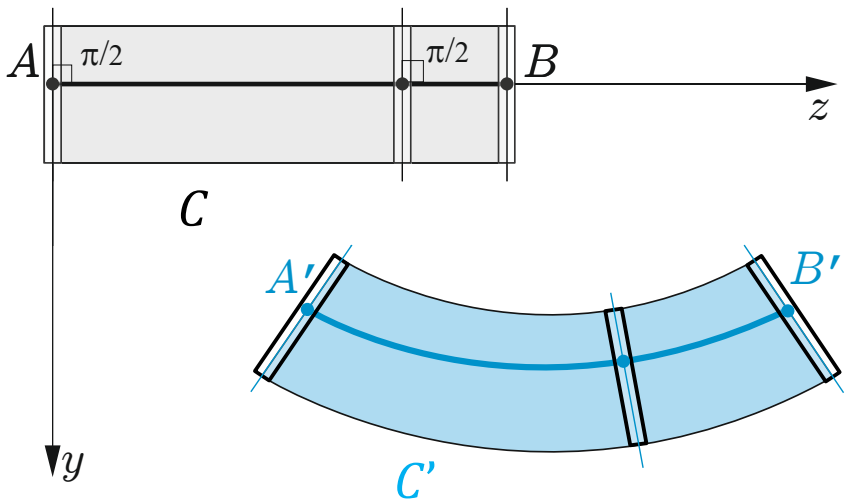
Parte II - Il modello di trave elastica 1D
1. Cinematica della trave

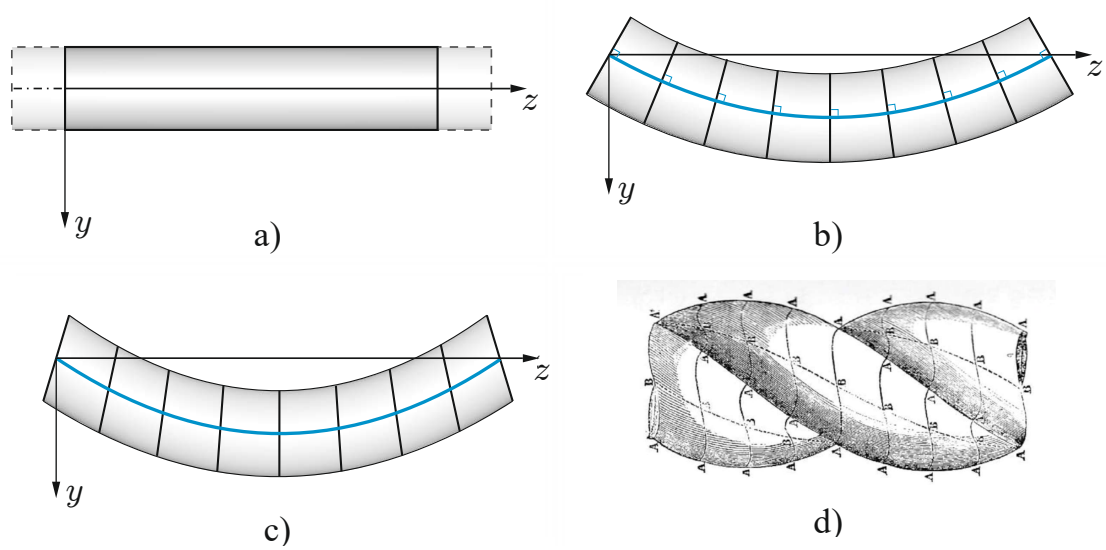
- **Obiettivi**
- **Spostamenti e rotazioni**
- **Misure di deformazione**
  - deformazione assiale ε $[0]$
  - scorrimento angolare γ $[0]$
  - curvatura flessionale χ $[L^{-1}]$
- **Equazioni implicite di congruenza**
- **Problema cinematico**
- **Esercizi** (testo: §5.9-5.11)

1. Cinematica della trave: obiettivi

Obiettivo 1. Definire un modello atto a caratterizzare i cambiamenti di configurazione (da C a C') di una trave 1D o di un sistema di travi

Obiettivo 2. Definire per il modello le grandezze atte a caratterizzare (misurare) i cambiamenti di forma e/o dimensione manifestati dalla trave nel passaggio da C a C'





C : configurazione iniziale

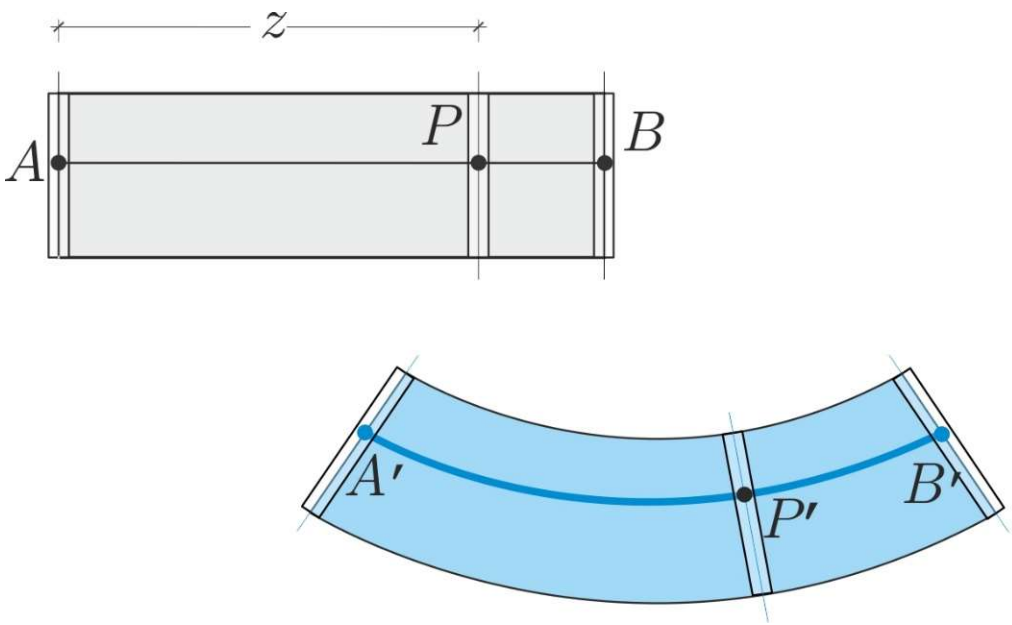
C' : configurazione finale

Trasporto f

f: C → C'

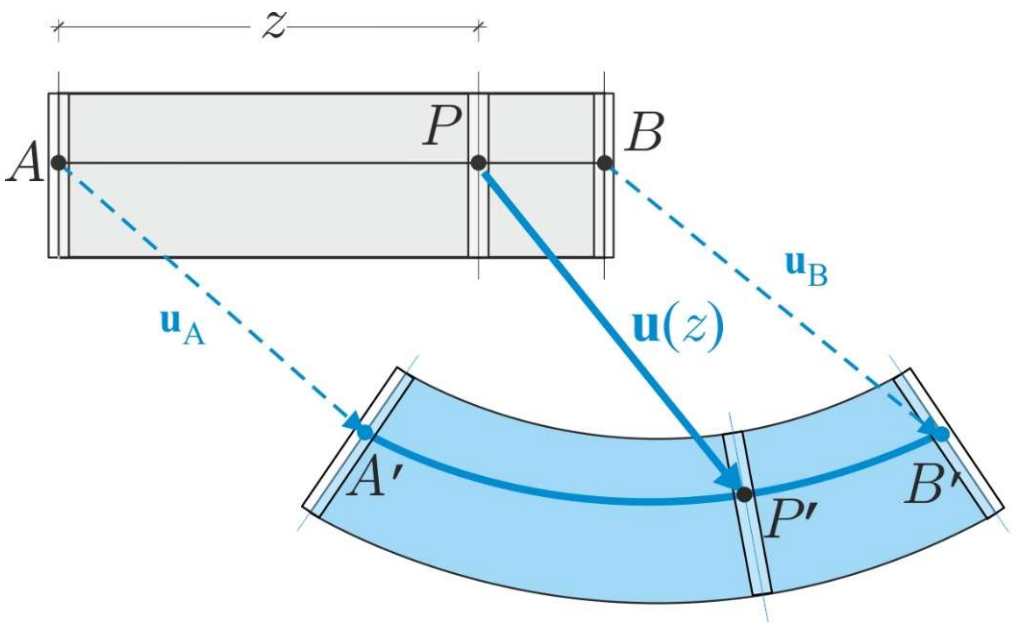
Ipotesi 0.
Le sezioni si modellano come corpi rigidi piani

1. Cinematica della trave: spostamento



1. Cinematica della trave: spostamento

Vettore spostamento. Campo di spostamenti: Assegnato un punto P sulla linea d'asse della trave, si definisce spostamento $\mathbf{u}(z)$ il vettore applicato $\mathbf{PP'}$. Dimensioni fisiche [L], funzione vettoriale di una variabile. Il campo vettoriale definito dallo spostamento di tutti i punti della linea d'asse caratterizza la deformata o linea elastica della trave.



$$0 \leq z \leq l$$

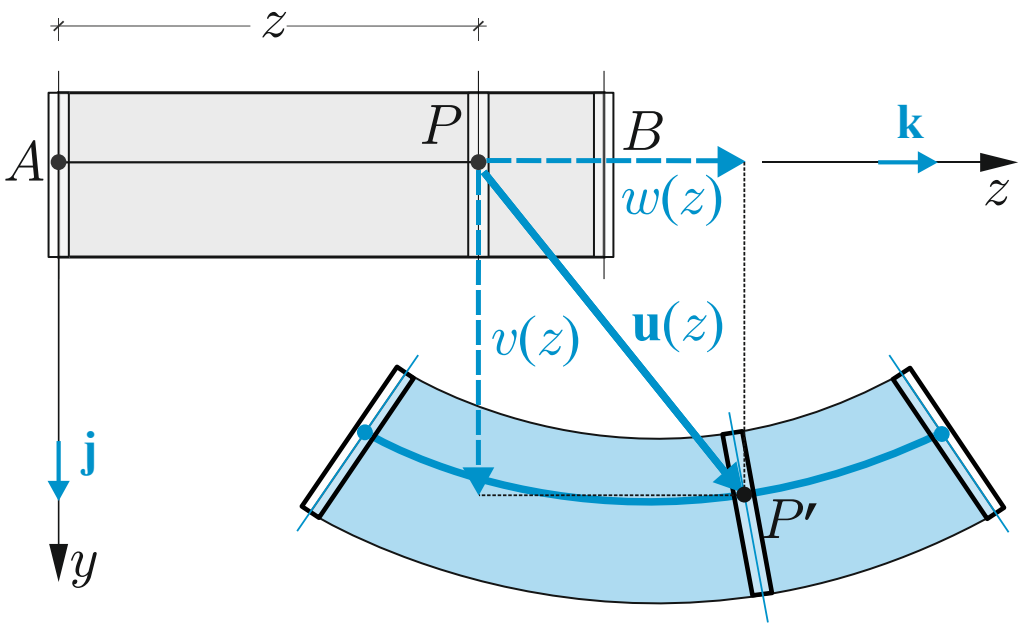
$$\mathbf{u}(z) \rightarrow \textit{Vettore spostamento } [L]$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_A$$

$$\mathbf{u}(l) = \mathbf{u}_B$$

1. Cinematica della trave: spostamento

Vettore spostamento. Componenti scalari: Le componenti del vettore $\mathbf{u}(z)$ nel sistema di riferimento locale hanno dimensioni fisiche [L] e sono funzioni scalari di una variabile. La componente $w(z)$ rispetto all'asse locale z è detta componente assiale dello spostamento, la componente $v(z)$ rispetto all'asse locale y è detta componente trasversale dello spostamento.



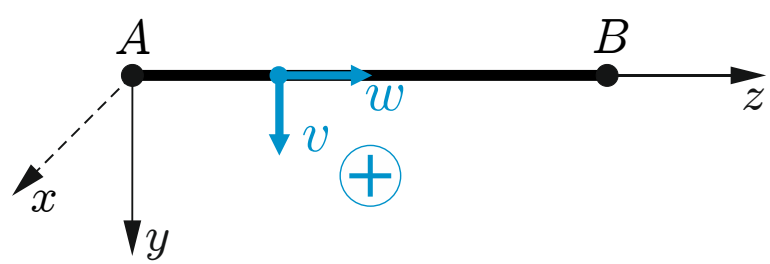
$$0 \leq z \leq l$$

$$\mathbf{u}(z) = w(z)\mathbf{k} + v(z)\mathbf{j}$$

$w(z)$ → *spostamento assiale*$[L]$

$v(z)$ → *spostamento trasversale*$[L]$

Convenzioni



1. Cinematica della trave: spostamento

Vettore rotazione: Assegnato un punto P sulla linea d'asse e la sezione corrispondnte, si definisce rotazione $\boldsymbol{\theta}(z)$ il vettore che esprime la rotazione rigida intorno a P della sezione. Dimensioni fisiche [0], funzione vettoriale di una variabile.

$0 \leq z \leq l$

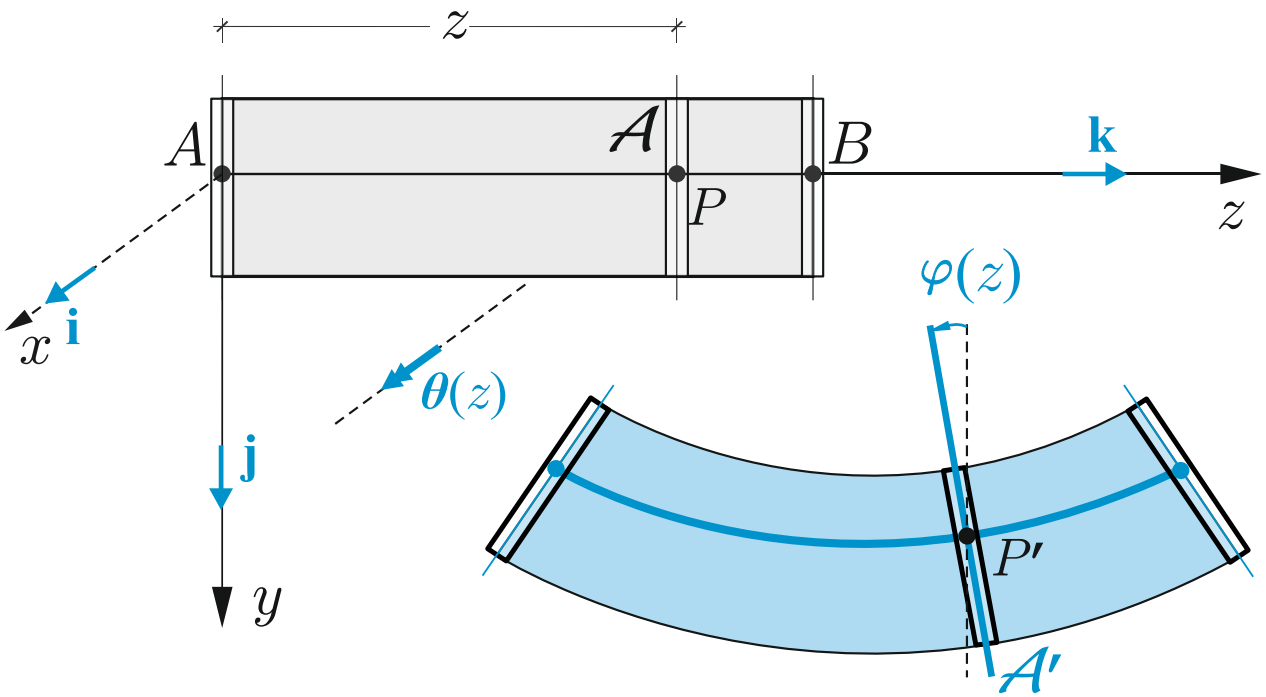
$\boldsymbol{\theta}(z) \rightarrow$ *Vettore rotazione* [0]

$\boldsymbol{\theta}(z) = \varphi(z)\mathbf{i}$

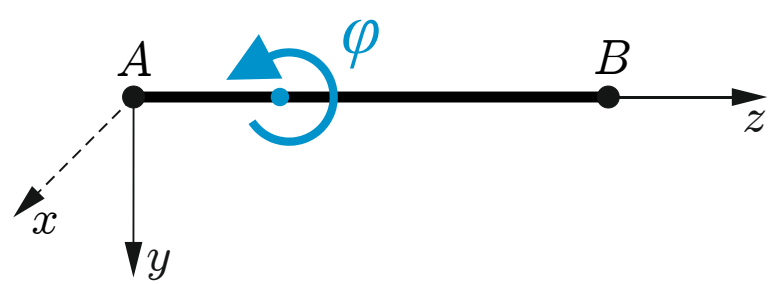
$\boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_A$

$\boldsymbol{\theta}(l) = \boldsymbol{\theta}_B$

$\varphi(z) \rightarrow$ *rotazione della sezione* [0]



Convenzioni



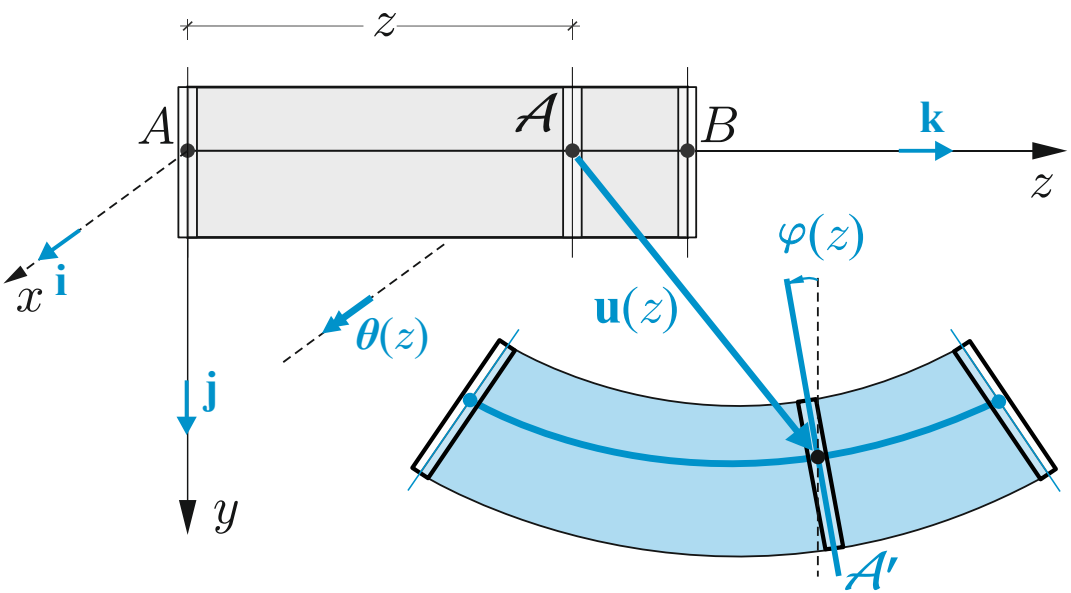
1. Cinematica della trave: spostamento

Ipotesi

Ipotesi 1: piccoli spostamenti

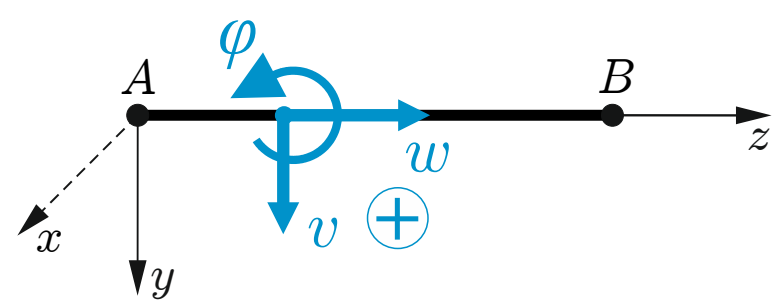
1a $\forall\, z \in [0, l], \quad |\mathbf{u}(z)| \ll l$ ***1b*** $\forall\, z \in [0, l], \quad |\boldsymbol{\theta}(z)| \ll 1\, rad$

Ipotesi 2: regolarità delle funzioni $w(z)$, $v(z)$, $\varphi(z)$ in z



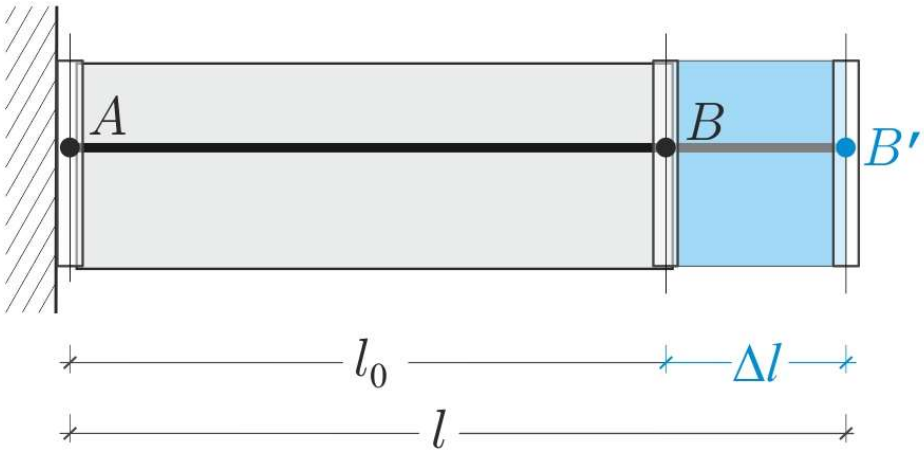
(NB. D'ora in poi per chiarezza, nelle figure non si rispettano le ipotesi dei piccoli spostamenti)

Convenzioni



1. Cinematica della trave: misure di deformazione

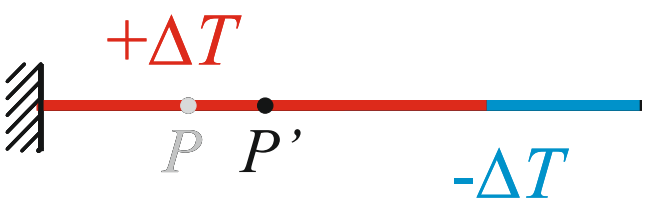
Deformazione assiale ε



$$\Delta l = l - l_0$$

$$\varepsilon_{tot} = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

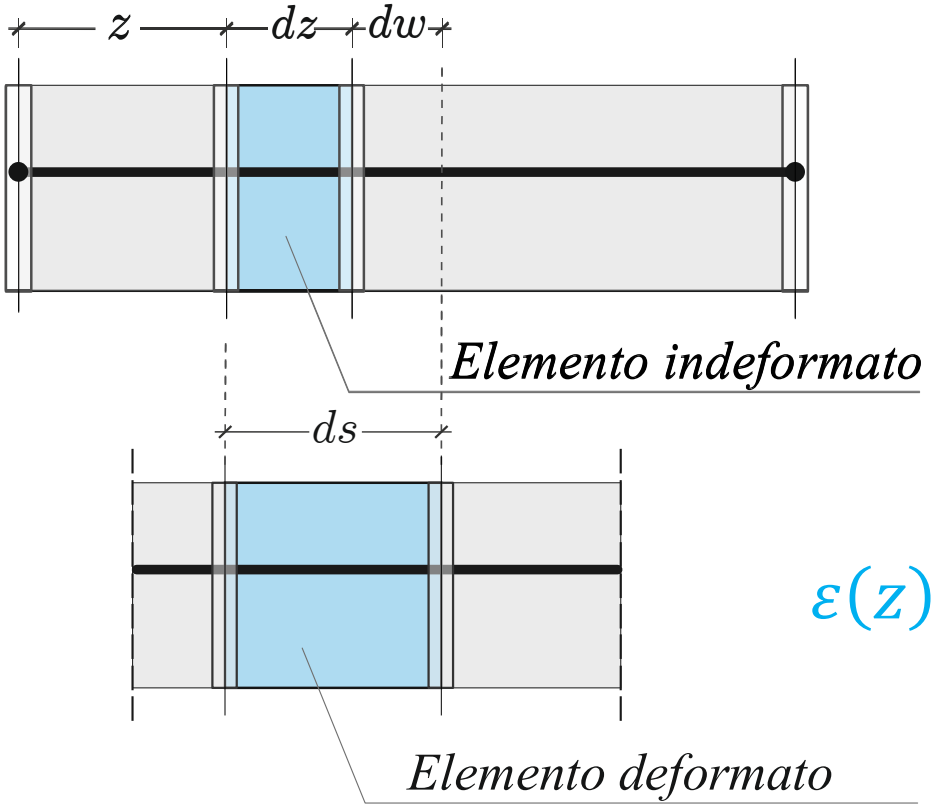
Esempio: $\varepsilon_{tot} = 0$ ma deformazioni locali



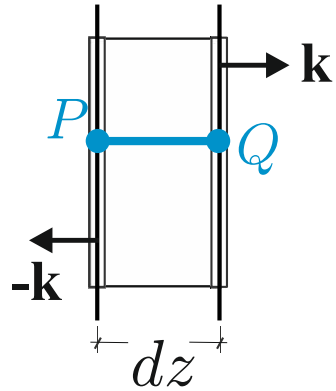
$$\varepsilon_{tot} = 0$$

1. Cinematica della trave: misure di deformazione

Deformazione assiale $\varepsilon(z)$



Elemento infinitesimo



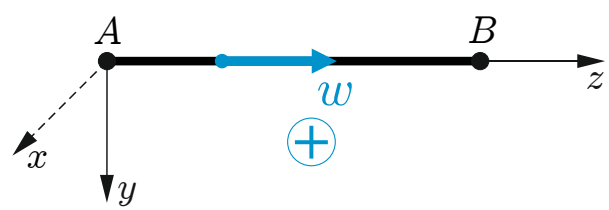
$P \equiv z,$
$Q \equiv z + \mathrm{d}z$

$$\varepsilon(z) = \frac{ds - dz}{dz} \qquad ds = dw + dz$$

$$\varepsilon(z) = \frac{dw}{dz} = w'(z)$$

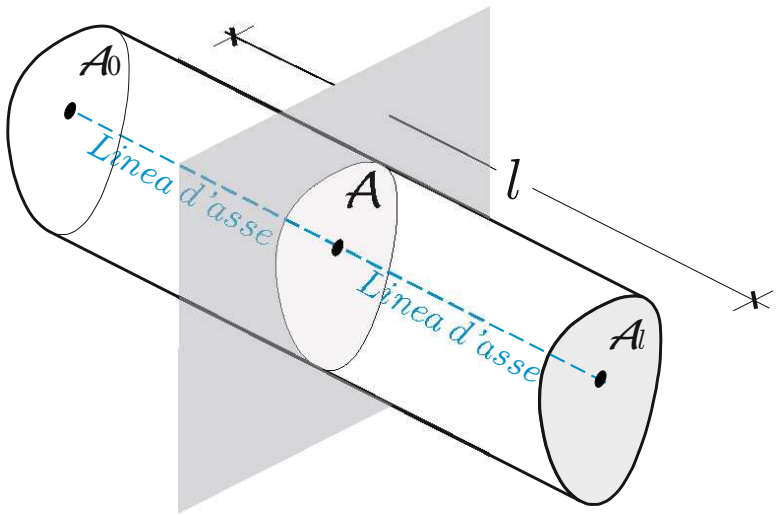
$\varepsilon(z)$ → *deformazione assiale* [0]

Se $\varepsilon(z) = 0 \quad \forall z \in [0, l]$ → *Trave inestensibile*



1. Cinematica della trave: misure di deformazione

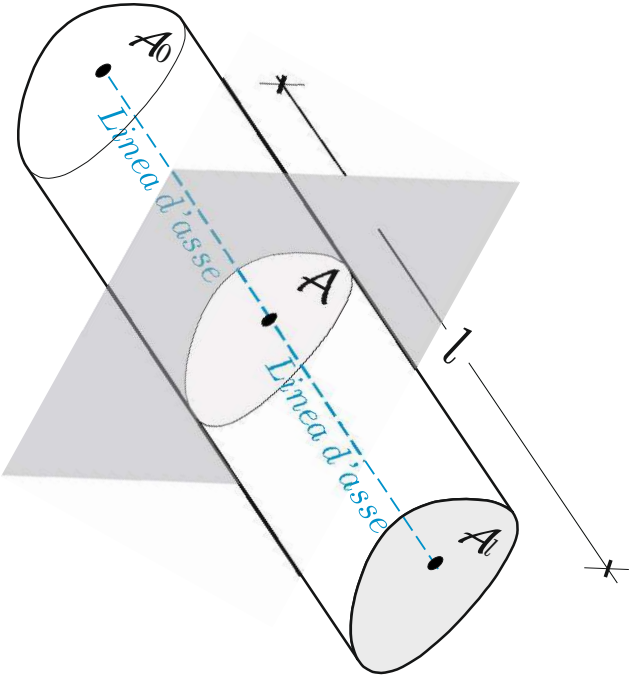
Rotazione Rigida – Curvatura nulla



1. Cinematica della trave: misure di deformazione

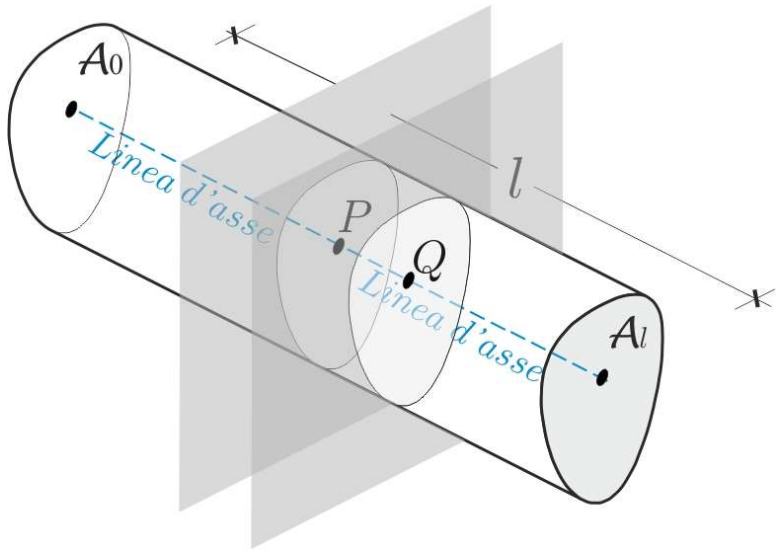
Rotazione Rigida – Curvatura nulla

Rotazione Rigida – Le sezioni ruotano tutte dello stesso angolo rimanendo parallele



1. Cinematica della trave: misure di deformazione

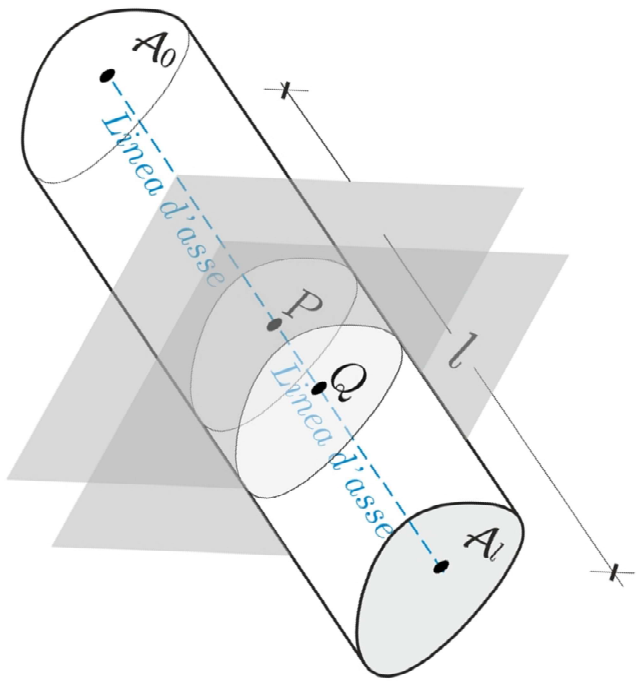
Rotazione Rigida – Curvatura nulla



1. Cinematica della trave: misure di deformazione

Rotazione Rigida – Curvatura nulla

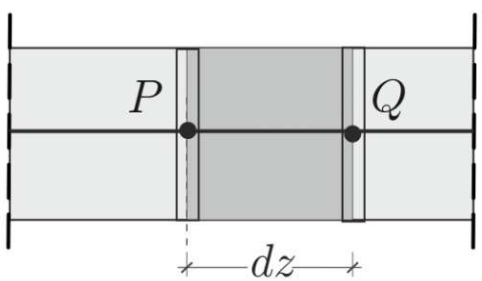
Curvatura locale nulla– In corrispondenza del generico concio di trave ($\overline{PQ} = dz$) si ha curvatura nulla se le due sezioni poste a distanza infinitesima ruotano dello stesso angolo rimanendo parallele



1. Cinematica della trave: misure di deformazione

Curvatura flessionale

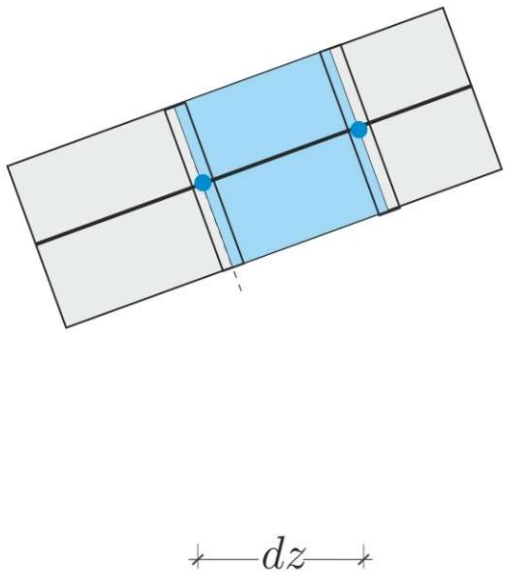
$$P \equiv z,$$
$$Q \equiv z + \mathrm{d}z$$



1. Cinematica della trave: misure di deformazione

Curvatura flessionale $\chi(z) = 0$

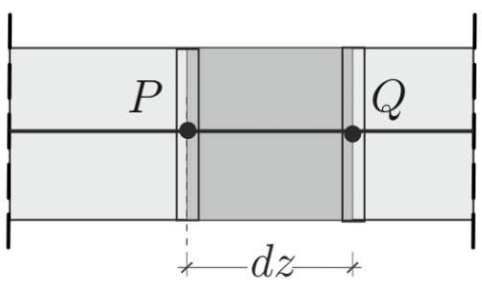
$$P \equiv z,$$
$$Q \equiv z + \mathrm{d}z$$



1. Cinematica della trave: misure di deformazione

Curvatura flessionale

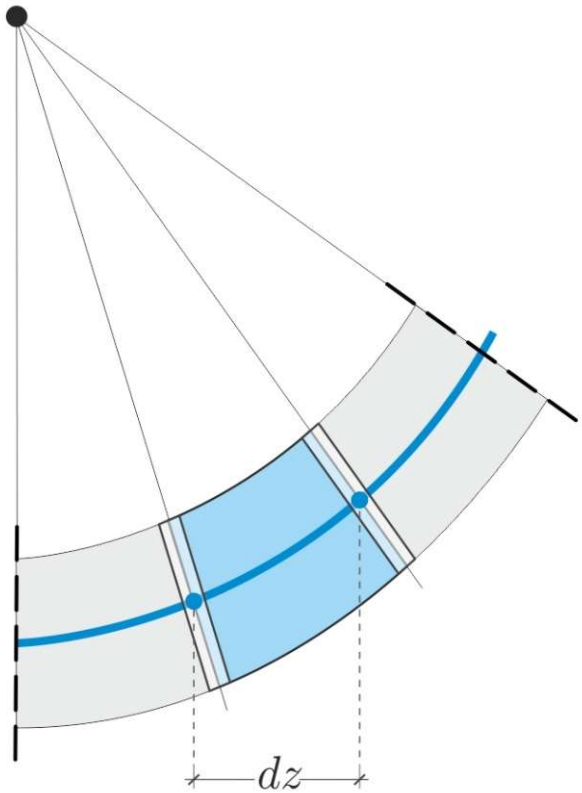
$$P \equiv z,$$
$$Q \equiv z + \mathrm{d}z$$



1. Cinematica della trave: misure di deformazione

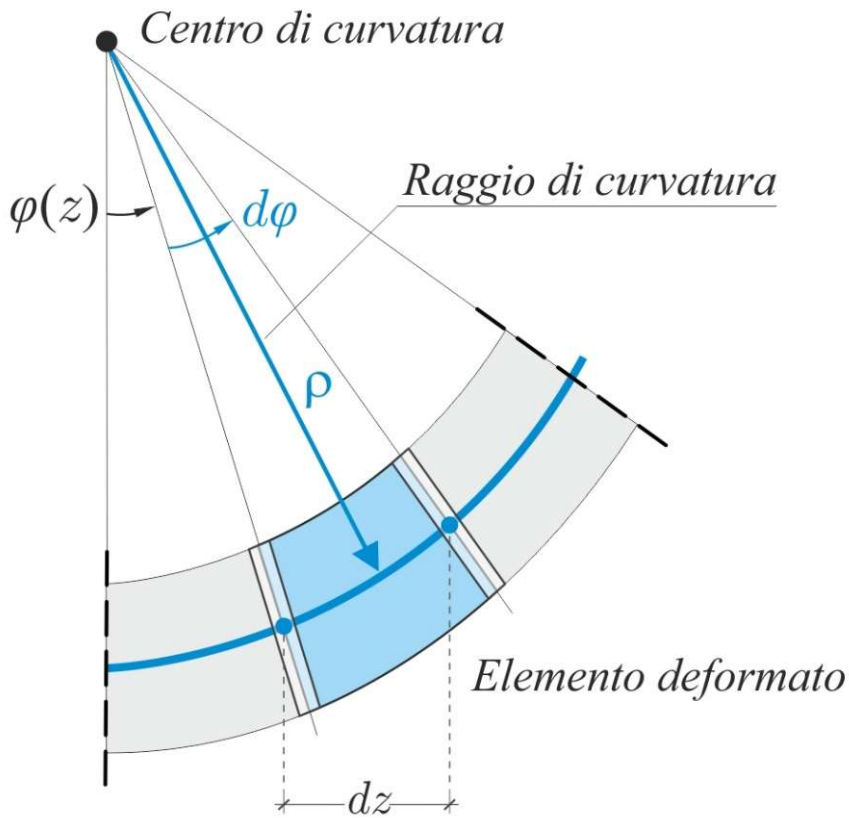
Curvatura flessionale $\chi(z) \neq 0$

$$P \equiv z,$$
$$Q \equiv z + \mathrm{d}z$$



1. Cinematica della trave: misure di deformazione

Curvatura flessionale $\chi(z) \neq 0$



$$P \equiv z,$$
$$Q \equiv z + \mathrm{d}z$$

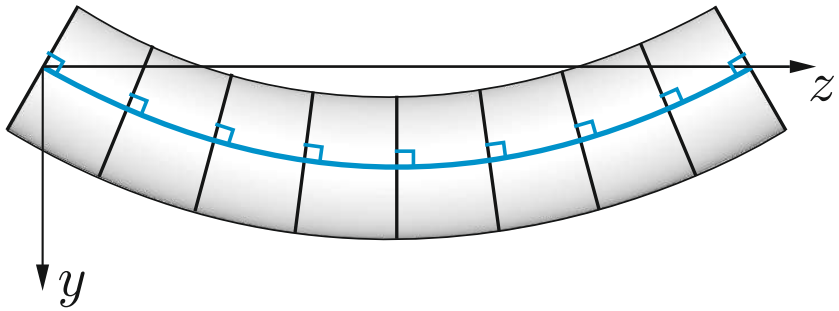
$$\chi(z) = \frac{\varphi(z + dz) - \varphi(z)}{dz} = \frac{d\varphi}{dz}$$

$\chi(z) \rightarrow$ *curvatura flessionale* $[L^{-1}]$

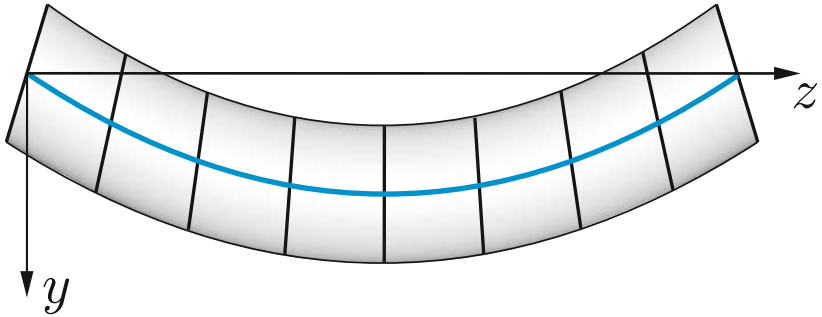
$$\boxed{\chi(z) = \varphi'(z)}$$

1. Cinematica della trave: misure di deformazione

Scorrimento angolare $\gamma(z)$



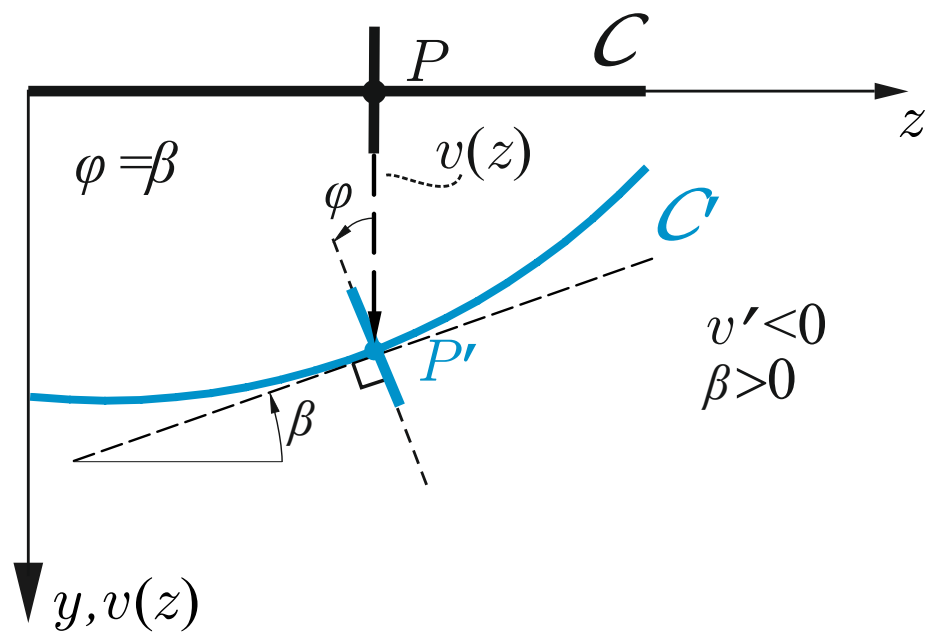
Scorrimento angolare nullo: le sezioni si mantengono ⊥ alla linea d'asse



Scorrimento angolare non nullo

1. Cinematica della trave: misure di deformazione

Scorrimento angolare nullo $\gamma(z) = 0$



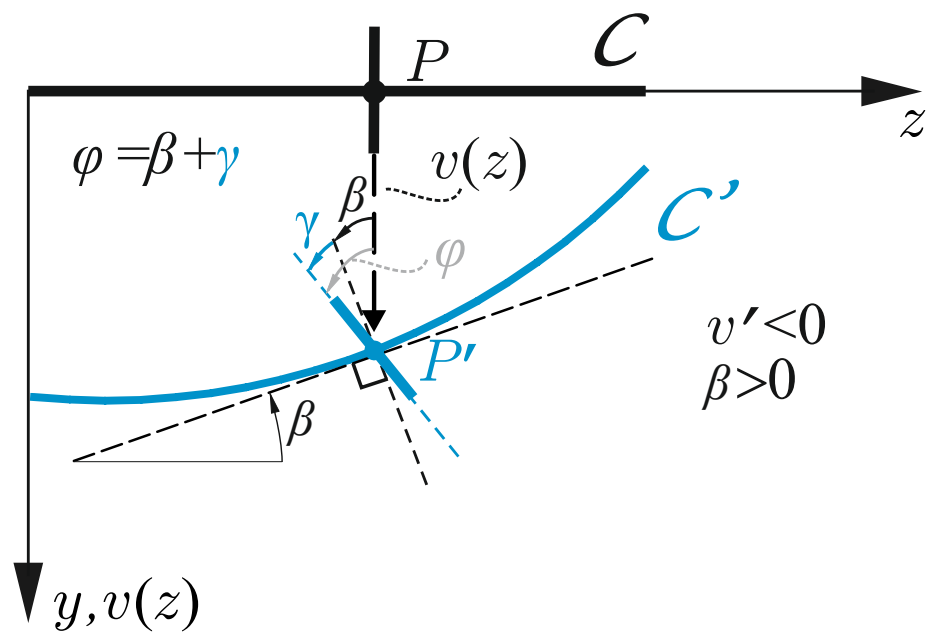
Scorrimento angolare nullo: $\gamma(z) = 0$, le sezioni si mantengono ⊥ alla linea d'asse

$$\varphi(z) = \beta(z) \qquad \beta(z) \cong \tan\beta(z) = -v'(z)$$

$$\boxed{\varphi(z) = -v'(z)}$$

1. Cinematica della trave: misure di deformazione

Scorrimento angolare $\gamma(z) \neq 0$



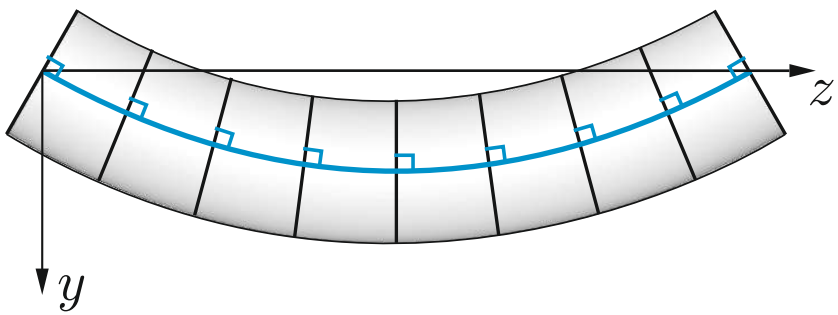
Scorrimento angolare $\gamma(z) \neq 0$, le sezioni non si mantengono $\perp$ alla linea d'asse

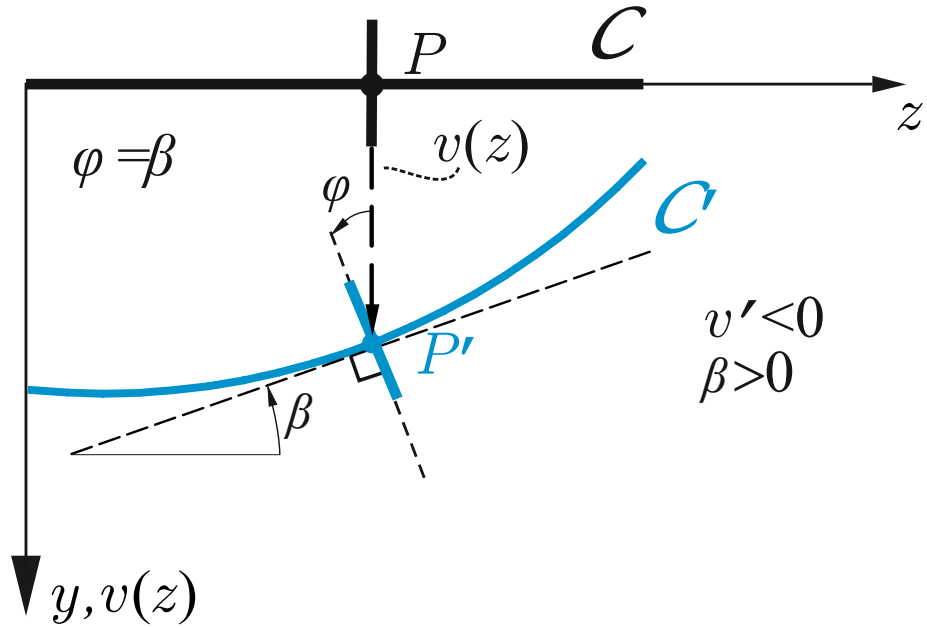
$$\varphi(z) = \beta(z) + \gamma(z) \qquad \beta(z) \cong \tan\beta(z) = -v'(z)$$

$$\boxed{\gamma(z) = \varphi(z) - \beta(z) = \varphi(z) + v'(z)}$$

1. Cinematica della trave: misure di deformazione

Modello Eulero-Bernouilli $\gamma(z) = 0$





$$Se\ \gamma(z) = 0 \quad \Rightarrow \varphi(z) = -v'(z) \quad \Rightarrow \quad \chi(z) = \varphi'(z) = [-v'(z)]' = -v''(z)$$

Se $\gamma(z) = 0 \quad \forall z \in [0, l]$ → *Trave indeformabile a taglio (Eulero-Bernouilli)*

$$\boxed{\varphi(z) = -v'(z)}$$

$$\boxed{\chi(z) = -v''(z)}$$

1. Cinematica della trave: misure di deformazione

- Deformazione assiale $\varepsilon(z)$ $[0]$
- Scorrimento angolare $\gamma(z)$ $[0]$
- Curvatura flessionale $\chi(z)$ $[L^{-1}]$

Trave Inestensibile

$$\varepsilon(z) = 0, \qquad \forall z \in [0, l]$$

Trave Indeformabile a Taglio o puramente flessibile

$$\gamma(z) = 0, \qquad \forall z \in [0, l]$$

Trave Rigida

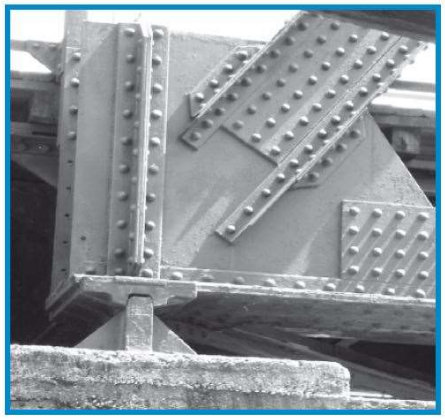
$$\varepsilon(z) = 0,\ \gamma(z) = 0,\ \chi(z) = 0 \qquad \forall z \in [0, l]$$

1. Cinematica della trave: i vincoli

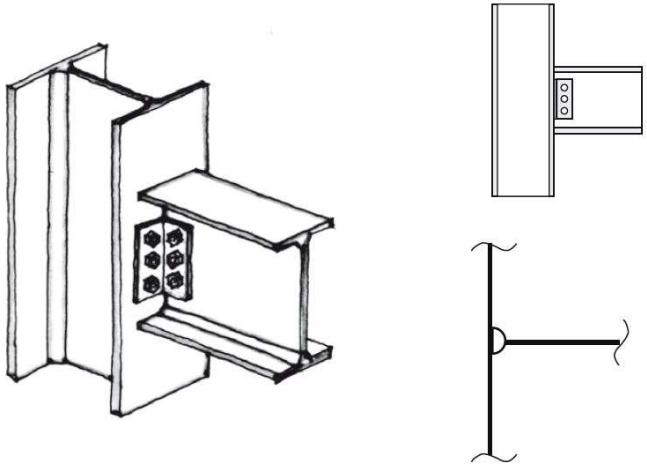
Definizioni. Gli elementi strutturali devono essere collegati fra di loro e con gli elementi fissi esterni alla struttura (*suolo*). I dispositivi di connessione che realizzano ciò sono detti *vincoli*. I vincoli che collegano gli elementi strutturali con il suolo sono detti **esterni**, i vincoli che collegano due o più elementi della stessa struttura sono detti **interni**.

Modello dei vincoli. I vincoli sono modellati assimilandoli a dispositivi ideali che presentano le seguenti caratteristiche: sono *puntiformi*, *lisci* (privi di attrito) e *bilaterali*. Si ammetterà inoltre valida *l'ipotesi dei piccoli spostamenti*.

Prestazioni cinematiche. Dal punto di vista cinematico i vincoli pongono delle limitazioni agli spostamenti dei punti e/o alle rotazioni *delle sezioni delle travi* cui sono applicati, riducendo il numero di gradi di libertà del sistema.



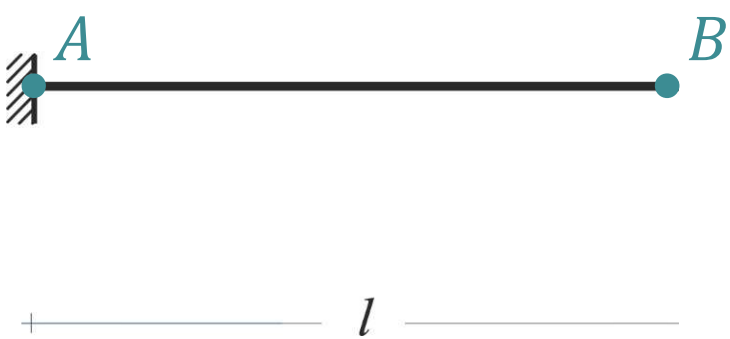
Vincoli esterni

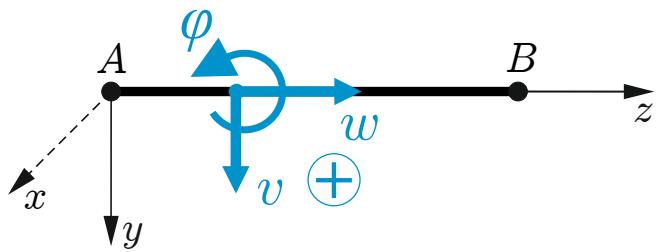


Vincoli interni

1. Cinematica della trave: i vincoli

Esempio





$$\begin{cases} w_A = 0 \\ v_A = 0 \\ \varphi_A = 0 \end{cases} \qquad A: z = 0 \rightarrow \begin{cases} w(0) = 0 \\ v(0) = 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

Condizioni al contorno (*c.c.*) sui campi di spostamento e rotazione delle sezioni
FORMA SCLARE

$$\begin{cases} \mathbf{u}_A = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\theta}_A = \mathbf{0} \end{cases} \qquad A: z = 0 \rightarrow \begin{cases} \mathbf{u}(0) = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\theta}(0) = \mathbf{0} \end{cases}$$

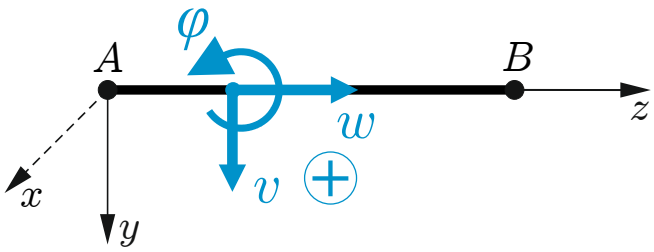
Condizioni al contorno (*c.c.*) sui campi di spostamento e rotazione delle sezioni
FORMA VETTORIALE

1. Cinematica trave: equazioni implicite di congruenza

Equazioni implicite di congruenza: stabiliscono un legame differenziale fra spostamenti e rotazioni e misure di deformazione.

Forma scalare

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases} + c.c.$$



Forma vettoriale

$$\begin{cases} \mathbf{e} = \mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\theta}' \end{cases} \qquad \begin{matrix} \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_A & \mathbf{u}(l) = \mathbf{u}_B \\ \boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_A & \boldsymbol{\theta}(l) = \boldsymbol{\theta}_B \end{matrix}$$

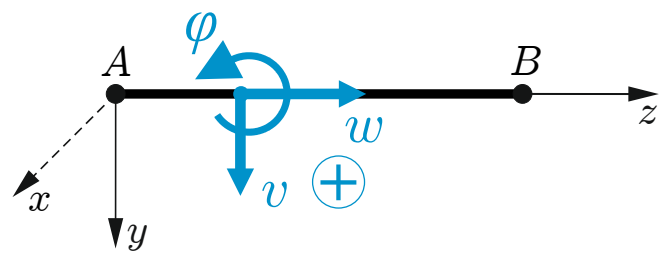
$$\mathbf{e} = \varepsilon(z)\mathbf{k} + \gamma(z)\mathbf{j}$$
$$\boldsymbol{\chi} = \chi(z)\mathbf{i}$$

1. Cinematica trave: equazioni implicite di congruenza

Equazioni implicite di congruenza (modello di Eulero-Bernouilli): stabiliscono un legame differenziale fra spostamenti e rotazioni e misure di deformazione.

Forma scalare

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ 0 = \varphi(z) + v'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} \qquad + c.c.$$



Forma vettoriale

$$\begin{cases} \mathbf{e} = \mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\theta}' \end{cases} \qquad \begin{matrix} \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_A & \mathbf{u}(l) = \mathbf{u}_B \\ \boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_A & \boldsymbol{\theta}(l) = \boldsymbol{\theta}_B \end{matrix}$$

$$\mathbf{e} = \varepsilon(z)\mathbf{k}$$
$$\boldsymbol{\chi} = \chi(z)\mathbf{i}$$

2. Cinematica della trave: problema cinematico

Posizione del problema

Assegnati su una trave vincolata un campo di misure di deformazione esterne imposte (ad es. originate da variazioni termiche) e cedimenti vincolari, determinare la configurazione deformata C'

Formulazione analitica (Modello di Timoshenko)

Forma scalare

$$\begin{cases} \boxed{\varepsilon(z) = w'(z)} \\ \boxed{\begin{aligned} \gamma(z) &= \varphi(z) + v'(z) \\ \chi(z) &= \varphi'(z) \end{aligned}} \end{cases} + c.c.$$

Problema assiale

Problema flessionale

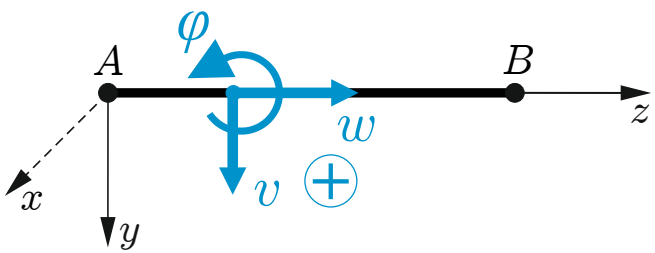
Forma vettoriale

$$\begin{cases} \mathbf{e} = \mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\theta}' \end{cases} \qquad \begin{aligned} \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_A \\ \boldsymbol{\theta}(0) &= \boldsymbol{\theta}_A \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbf{u}(l) &= \mathbf{u}_B \\ \boldsymbol{\theta}(l) &= \boldsymbol{\theta}_B \end{aligned}$$

$w(z)$, $v(z)$, $\varphi(z)$ → *spostamenti e rotazioni*

$\varepsilon(z)$, $\gamma(z)$, $\chi(z)$ → *misure di deformazione*

Problema assiale **Problema flessionale**



2. Cinematica della trave: problema cinematico

Posizione del problema

Assegnati su una trave vincolata un campo di misure di deformazione esterne imposte (ad es. originate da variazioni termiche) e cedimenti vincolari, determinare la configurazione deformata C'

Formulazione analitica (Modello di Eulero-Bernouilli)

$$\gamma(z) = 0 \;\rightarrow \varphi(z) = -v'(z)$$

$$\begin{cases} \boxed{\varepsilon(z) = w'(z)} \\ \boxed{\chi(z) = -v''(z)} \end{cases} + c.c$$

Problema assiale

Problema flessionale

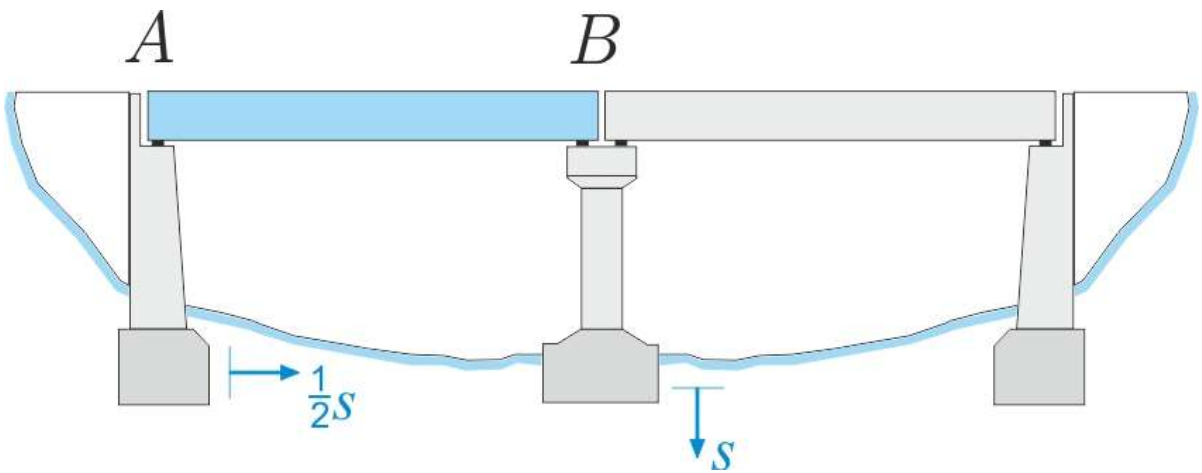
$w(z)$, $\varepsilon(z)$, $v(z)$, $\chi(z)$, $\varphi(z) = -v'(z)$ $\rightarrow$ *spostamenti e rotazioni*

$\rightarrow$ *misure di deformazione*

Problema assiale **Problema flessionale**

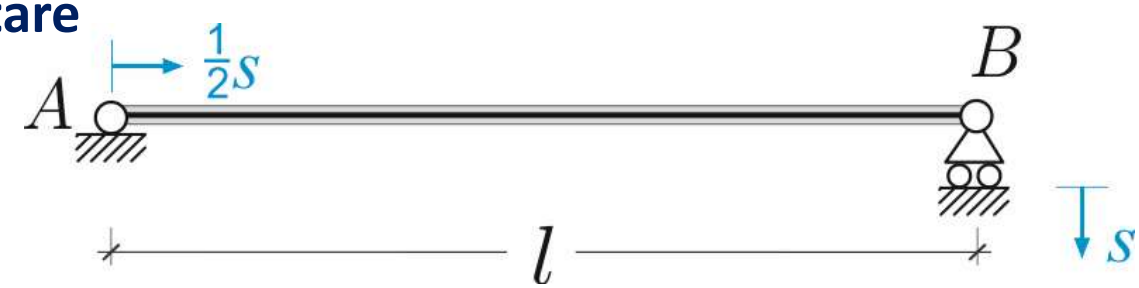
2. Cinematica della trave: problema cinematico

Esempio



Come si sposta la trave AB a seguito dei cedimenti del terreno?

Modello elementare

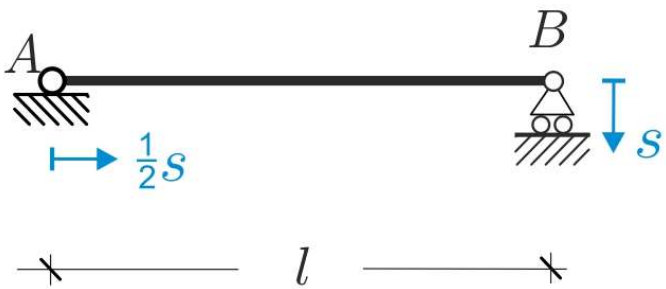


NB. I cedimenti s non sono forze ma spostamenti noti, dim [L]

$$\varepsilon(z) = 0, \quad \gamma(z) = 0, \quad \chi(z) = 0 \qquad \forall z \in [0, l]$$

2. Cinematica della trave: problema cinematico

Formulazione analitica



Numero di g.d.l

$$n = 3n_C = 3$$

Vincoli semplici

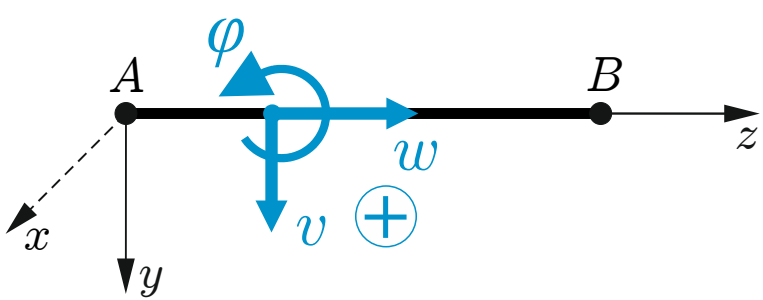
$$m = 2 + 1 = 3$$

Esempio

La struttura in figura è soggetta a cedimenti noti diretti come in figura. Determinare la nuova configurazione assunta dal sistema e gli spostamenti dei punti significativi..

Dati: luce l, modulo cedimenti s ($s \ll l$) (Ad es. $l = 2\text{m}$, $s = 0.02\text{m}$)

Equazioni implicite di congruenza



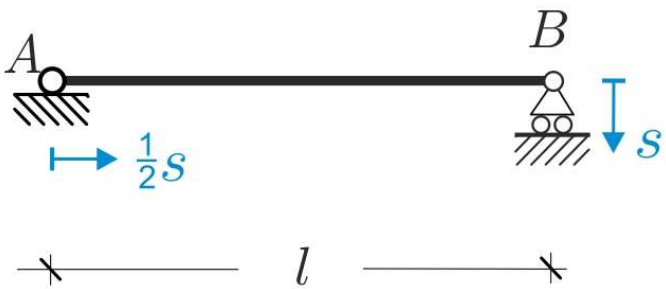
$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} w'(z) = 0 \\ v''(z) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$w(z) = a_1 \qquad v'(z) = b_1$$

$$v(z) = b_1 z + b_2$$

2. Cinematica della trave: problema cinematico

Formulazione analitica



Numero di g.d.l

$$n = 3n_C = 3$$

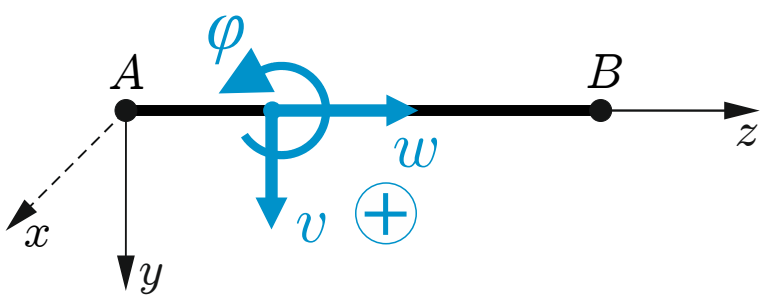
Vincoli semplici

$$m = 2 + 1 = 3$$

Esempio

La struttura in figura è soggetta a cedimenti noti diretti come in figura. Determinare la nuova configurazione assunta dal sistema e gli spostamenti dei punti significativi..

Dati: luce l, modulo cedimenti s ($s \ll l$) (Ad es. $l = 2\text{m}$, $s = 0.02\text{m}$)



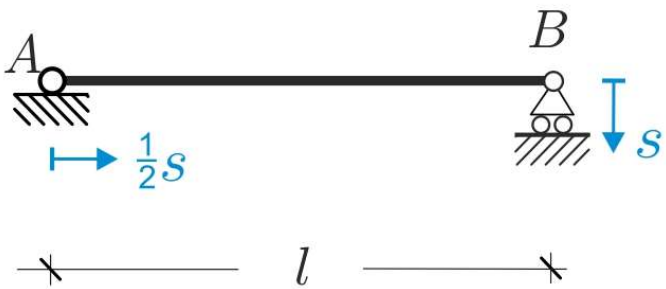
Condizioni al contorno

$$w(z) = a_1$$
$$v(z) = b_1 z + b_2$$

$$w(0) = \frac{1}{2}s \qquad a_1 = \frac{1}{2}s$$
$$v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad b_2 = 0 \qquad b_1 = \frac{s}{l}$$
$$v(l) = +s$$

2. Cinematica della trave: problema cinematico

Formulazione analitica



Numero di g.d.l

$$n = 3n_C = 3$$

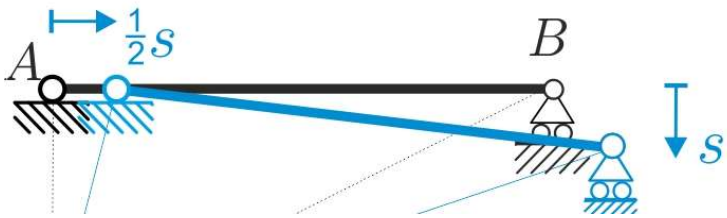
Vincoli semplici

$$m = 2 + 1 = 3$$

Esempio

La struttura in figura è soggetta a cedimenti noti diretti come in figura. Determinare la nuova configurazione assunta dal sistema e gli spostamenti dei punti significativi..

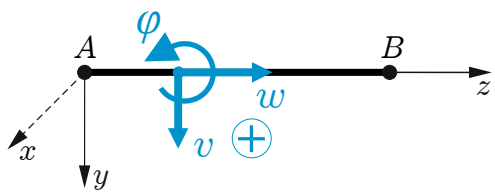
Dati: luce l, modulo cedimenti s ($s \ll l$)
(Ad es. $l = 2\text{m}$, $s = 0.02\text{m}$)



Soluzione

$$w(z) = \frac{1}{2}s$$

$$v(z) = \frac{s}{l}z$$



$$A: \begin{cases} w(0) = \frac{1}{2}s \\ v(0) = 0 \end{cases} \qquad B: \begin{cases} w(l) = \frac{1}{2}s \\ v(l) = +s \end{cases}$$